

# シンクロトロン放射を取り入れた二温度磁気流体計算による 3次元ジェット伝搬シミュレーション

大村 匠

町田真美

九州大学大学院理学府物理学専攻

## 1. 課題の背景

国際プロジェクト「Event Horizon Telescope」は、地球から 5500 万光年離れたおとめ座銀河団の中心に位置する電波銀河 M87 の中心部において、太陽の 1 億倍の質量を持つ超大質量ブラックホールの影「ブラックホールシャドウ」を世界で初めて撮像した。ブラックホールには、超大質量ブラックホールと太陽の数倍から数十倍の質量を持つ恒星質量ブラックホールが存在するが、恒星質量ブラックホールは、半径が数十 km と非常に小さいため、ブラックホールシャドウを直接撮像することが極めて困難である。ブラックホールは強い重力で周囲の物質を吸い込む反面、その莫大な重力エネルギーを開放することで、光速に近い速度を持つ細く絞られたプラズマ流“ジェット”を噴出させる。そのため、恒星質量ブラックホールにおいても、長距離に渡って星間空間を伝搬するジェットは、X 線や電波波長帯で観測することができる。

ジェットは、ブラックホール中心近傍の高エネルギーなガスを遠方へと伝える役割を担っており、周辺環境に多大な影響を与える。特に、宇宙の再電離や星形成史を語る上で、ジェットは欠かせない存在である。しかしながら、ジェットの詳細な物理(内部構造、プラズマ物理量)や周辺環境に及ぼす影響は、未だ明らかにされていない点が多い。

超音速で伝播するジェットは、衝撃波を有する高温で希薄なプラズマである。様々な天体衝撃波の観測から、衝撃波中の電子とイオンは、加熱率が異なるため、衝撃波下流で電子とイオンの 2 温度プラズマとなることが知られている(e.g., Ghavamian et al.2013)。また、クーロン衝突の頻度は、極端に低く電子とイオンの緩和時間はジェットの伝搬時間よりも長い。そのため、ジェットは、電子とイオンが熱平衡でない 2 温度プラズマであると予想される。しかし、これまでのジェット伝搬シミュレーションにおける先行研究では、プラズマの 2 温度性が考慮されていなかった。そこで、Ohmura et al.(2019)では、電子とイオンそれぞれのエネルギー一方程式を記述する 2 温度 MHD 方程式を解くジェット伝搬シミュレーションを行い、ジェット伝搬問題における 2 温度プラズマの重要性を示した。しかし、Ohmura et al.(2019)では、2 次元軸対称を仮定しており、衝撃波中の電子のエントロピー増加や輻射冷却を考慮していなかった。

以上の背景を踏まえて、本課題では新たに輻射冷却と衝撃波における電子加熱を取り入れたジェット伝播数値実験を行う。初めに、衝撃波による電子加熱量を決定するパラメータ  $f_e$  の影響を調べるため、20 モデルの 2 次元軸対称シミュレーションを行った。現在、その結果をまとめ、学術雑誌に投稿準備中である。本報告書では、軸対称シミュレーションと並行して行った 3 次元シミュレーションの結果を紹介する。

## 2.数値計算コード

### 2-1.基礎方程式

本課題では、プラズマガスはイオンと電子によって構成された中性プラズマを仮定し、プラズマの電気抵抗率が0である一流体二温度MHD方程式を解く：

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{n}\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$n \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p_{\text{gas}} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3)$$

$$nT_i \left( \frac{\partial s_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s_i \right) = -q^{ie} + (1 - f_e) q_{\text{vis}} \quad (4)$$

$$nT_e \left( \frac{\partial s_e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s_e \right) = +q^{ie} - q_{\text{rad}} + f_e q_{\text{vis}} \quad (5)$$

ここで、 $n$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{B}$ はそれぞれ、数密度、ガス速度、電流密度、磁場である。 $p_{\text{gas}}$ はガスの圧力で、イオンと電子の圧力 $p_i$ ,  $p_e$ を用いて $p_{\text{gas}} = p_i + p_e$ と表される。 $T_e$ ,  $T_i$ は、それぞれ、電子温度とイオン温度である。ガスは理想気体であるとし、イオンの内部エネルギー $\epsilon_i$ と電子の内部エネルギー $\epsilon_e$ はそれぞれ

$$\epsilon_i = \frac{p_i}{\gamma_i - 1}, \quad \epsilon_e = \frac{p_e}{\gamma_e - 1} \quad (6)$$

と書ける。ここで、 $\gamma_i$ ,  $\gamma_e$ はそれぞれイオンと電子の比熱比で共に5/3とした。 $s_i$ ,  $s_e$ はそれぞれイオンと電子のエントロピーで

$$s_i = \frac{1}{\gamma_i - 1} \log \frac{p_i}{n^{\gamma_i}}, \quad s_e = \frac{1}{\gamma_e - 1} \log \frac{p_e}{n^{\gamma_e}} \quad (7)$$

と表される。 $q^{ie}$ は、高温希薄なプラズマ中の電子とイオンのクーロン衝突による単位時間単位体積当たりのエネルギー交換率(クーロンカップリング)である。また、電子の輻射冷却によるエネルギー損失率 $q^{\text{rad}}$ として制動放射 $q^{\text{brems}}$ と熱的電子からのシンクロトロン放射 $q^{\text{sync}}$ を考える。クーロンカップリングと制動放射、シンクロトロン放射の式はそれぞれ

$$q^{ie}(n, T_i, T_e) = \Lambda_{ie} n^2 (T_i - T_e) \frac{\sqrt{2\pi} + \sqrt{\theta_i + \theta_e}}{\theta_i + \theta_e}, \quad \theta_i = \frac{k_B T_i}{m_i c^2}, \quad \theta_e = \frac{k_B T_e}{m_e c^2}, \quad (8)$$

$$q^{\text{brems}}(n, \theta_e) = \Lambda_{\text{brems}} n^2 F(\theta_e), \quad (9)$$

$$q^{\text{sync}}(n, T_e, B) = \Lambda_{\text{sync}} n B^2 T_e^2 \quad (10)$$

である(Stepney&Guilbert 1983, Dermer et al. 1991, Svensson 1984, Sadowski et al. 2017)。ここで、 $\Lambda_{ie}$ ,  $\Lambda_{\text{brems}}$ ,  $\Lambda_{\text{sync}}$ は、各冷却・加熱式における定数値、 $\theta_i$ ,  $\theta_e$ は電子とイオンの無次元温度、 $F(\theta_e)$ は制動放射の無次元放射率である。 $f_e$ は、衝撃波や数値粘性で生じる散逸加熱量 $q_{\text{vis}}$ の電子とイオンへの分配率(以下、加熱比と呼ぶ)である。MHDシミュレーションでの散逸加熱量の見積もり方法は、2-2節で詳しく述べる。

式(1)-(5)を以下のように保存形式に書き直すことができる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = \mathbf{S} \quad (11)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} n \\ nv \\ \mathbf{B} \\ E \\ ns_e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} nv \\ nv + p_T \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B} \\ v \mathbf{B} - \mathbf{B} v \\ (E + p_T) v - \mathbf{B} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \\ ns_e \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -q^{\text{rad}} \\ (+q^{\text{ie}} - q^{\text{rad}} + f_e q_{\text{vis}})/T_e \end{pmatrix} \quad (12)$$

ここで、 $\mathbf{I}$ は単位行列を表す。全エネルギー密度 $E$ と全圧力 $p_T$ は、

$$E = \epsilon_i + \epsilon_e + \frac{n|\mathbf{v}|^2}{2} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2} \quad (13)$$

$$p_T = p_{\text{gas}} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2} \quad (14)$$

によって関係づけられる。したがって、ソース項を考慮しない場合、ガス全体のダイナミクス(式(12)の 1 から 4 行目)は一温度 MHD 計算と全く同じであるが、電子とイオンはエネルギー交換を考慮した一流体二温度系となる。また、イオンのエネルギーは、ガス全体のエネルギーから電子のエネルギーを引くことで求めることができる。

本課題で用いた計算コードは、空間 5 次精度・時間 3 次精度を担保している高次精度 MHD コードの統合ソフトウェア CANS+を二温度 MHD 方程式へと拡張したものを使っている。CANS+(Matsumoto et al. 2019)では MHD 計算には、解像度や計算効率に優れた近似リーマン解法の一つである HLLD 法(Miyoshi & Kusano 2005)を採用している。加えて、MHD 特有の問題である $\nabla \cdot \mathbf{B}$ による数値誤差の蓄積を解消するために Dedner et al.(2016)による 9wave 法を用いている。また、ソース項の計算には、オペレータスプリット法を採用し、輻射冷却項の計算は陽解法を、クーロンカップリングと散逸加熱量の計算には陰解法をそれぞれ適用した。

## 2-2. 散逸加熱量の同定と衝撃波捕獲

本節では、MHD 数値実験において散逸加熱量を同定するアルゴリズムと衝撃波を解像するグリッドを求める方法を紹介する。本数値実験では、磁気抵抗や動粘性を含まない理想流体であるが、(特に衝撃波での) 数値粘性による散逸が生じる。

散逸加熱量は、Ressler et al.(2015)の方法を参考に以下の 3 つの手順で求める。

- 1.式(12)を解くことで、(n+1)ステップの比内部エネルギー、 $\epsilon_{\text{gas}}^{n+1}$ 、を求める。今回求めたガスの比内部エネルギーは、散逸によるエネルギー増加を含んだ値である。
- 2.散逸加熱を含まない断熱過程でのみ進化した比内部エネルギーを見積もるために、ガスのエントロピー保存式

$$\frac{\partial}{\partial t} (ns_{\text{gas}}) + \nabla \cdot (ns_{\text{gas}} \mathbf{v}) = 0 \quad (15)$$

を式(11)と並行して解くことで、(n+1)ステップ目のガスエントロピー $s_{\text{gas}}^{n+1}$ を求める。求めたガスエントロピーから、断熱過程でのみ時間進化した場合の比内部エネルギー

$$\epsilon_{\text{gas, ad}}^{n+1} = \frac{n^{\gamma_{\text{gas}}} \exp(s_{\text{gas}}^{n+1}(\gamma_{\text{gas}} - 1))}{\gamma_{\text{gas}} - 1} \quad (16)$$

を求めることができる。

- 3.したがって、単位時間単位体積あたりの散逸によって生じたエネルギー増加量は、

$$q_{\text{vis}} = (\epsilon_{\text{gas}}^{n+1} - \epsilon_{\text{gas, ad}}^{n+1}) / \Delta t \quad (17)$$

と求めることができる。ここで、 $\Delta t$ は、nステップから(n+1)ステップまでの時間刻み幅である。

次に、電子とイオンの加熱比、 $f_e$  の決定方法について説明する。この加熱比は、プラズマ物理における最大の謎の一つであり、MHDスケールよりも非常に小さいイオンのラーモア半径スケールのミクロな物理によって決定される。したがって、MHD計算に適用できる適当なモデルを用いる必要がある。本課題では、特に衝撃波で生じる散逸過程に着目している。

衝撃波モデルとして、 $f_e = 0.05$ の定数モデルを採用した。 $f_e = 0.05$ は、電子の断熱圧縮に加え、衝撃波中においてイオンから電子への散逸エネルギーの5パーセントが享受されることを表す。この値は、観測によって得られている地球や土星磁気圏のバウショック下流の電子とイオンの温度比を良く再現できることが知られている(Vink et al. 2015)。衝撃波モデルは、衝撃波中の物理を考えたモデルであるため、シミュレーション中に波面を分解しているグリッド(以下、衝撃波グリッド)を同定する必要がある。衝撃波グリッドは、Ryu et al. (2003)の方法を参考に、以下の3つ式を用いて同定する。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} < 0, \quad (18)$$

$$\nabla T_{\text{gas}} \cdot \nabla S_{\text{gas}} > 0, \quad (19)$$

$$|\Delta \log T| > \log T_{\text{jump}}|_{M=M_{\min}} \quad (20)$$

ここで、式(20)は、低マッハ数衝撃波を除外する条件式でランキン=ユゴニオの温度ジャンプ条件から求めらる。本計算では $M_{\min} = 4$ とした。一方で、衝撃波グリッド以外では、すべてのグリッドで $f_e = 0.5$ とした。本計算では理想流体を仮定しており、高次補間・高解像度であることから数値粘性の影響は少ないことが考えられる。ここで、 $f_e = 0.5$ は、散逸エネルギーを電子とイオンに等分配することを意味しており、 $T_e = T_i$ とすることではないことに注意されたい。

### 3.計算モデル

本課題は、カーテシアン座標系( $x, y, z$ )を用いる。計算領域に、 $x \in (-16, 16)$ ,  $y \in (-16, 16)$ ,  $z \in (0, 32)$ 、計算に用いたグリッド数は( $N_x, N_y, N_z$ ) = (800, 800, 800)とし、一様グリッドを採用した。本課題では、ジェットの生成機構と考えられている降着円盤の計算は行わず、ジェットの伝搬のみを解く。そのため、原点から半径1の円領域に磁気・運動エネルギーを持続的に注入することで収束したジェットを生成する。境界条件として、 $z=0$ におけるxy面には吸収境界を、その他の面は全て自由境界を採用した。本数値実験では、恒星質量程度のブラックホールから噴出するマイクロクエーサージェットを想定している。表1に、本課題における無次元定数をまとめる。

星間空間は、密度0.5個/cc・温度 $2 \times 10^6$ Kの磁化していない静止した一様なプラズマで満たされているとする。次にジェットのモデルについて説明する。ジェットは、その生成機構から角運動量を持っていることが期待される。そこで、円筒座標( $r, \phi, z$ )を用いて、下記の式に従い運動量を与える。

$$v_z = 0.2c, \quad v_r = 0, \quad v_\phi = \begin{cases} 0.1v_z \frac{r}{a} & (\text{case: } r = \sqrt{x^2 + y^2} < a) \\ 0.1v_z \left(\frac{a}{r}\right)^2 & (\text{case: } a < r < 1) \end{cases}, \quad (21)$$

$$B_z = 0, \quad B_r = 0, \quad B_\phi = \begin{cases} B_0 \frac{r}{a} & (\text{case: } r < a) \\ B_0 \left(\frac{a}{r}\right)^2 & (\text{case: } a < r < 1) \end{cases}, \quad (22)$$

今回の計算では、 $a = 0.2$ 、 $B_0 = 30\mu\text{G}$ とした。注入するジェットガスの温度は、電子とイオンとともに $1.0 \times 10^9\text{K}$ とし、ガス密度は 0.005 個/cc とする。

本計算には、東京大学の Oakforest-PACS を用いた。3 次元モデルは、フラット MPI 並列にて、64 ノードを使用し、4096 並列での計算を実施した。また、MCDRAM を有効にしたことで、使用していない場合と比較して、1.2-1.3 倍高速化することが確認できた。

表 1：数値計算で用いた無次元量

基本量	無次元変数	無次元量
長さ	$r_{\text{jet}}$	$1\text{pc} = 3.0 \times 10^{18}\text{cm}$
速度	$v_0$	$9.1 \times 10^7 \text{ cm/sec}$
重さ	$\rho_0 = m_i n_0$	$n_0 = 0.05 \text{ 1/cc}$

## 4.結果および考察

### 4-1. ジェットダイナミクス

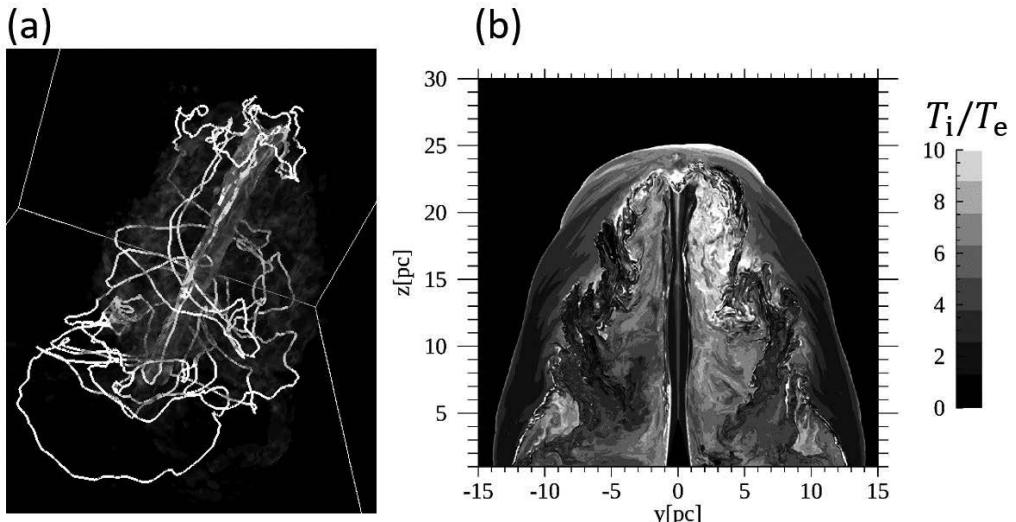


図 1 : (a)  $t = 1045$  年におけるシミュレーション結果。白線は磁力線を表す。電子温度( $T_e = 10^8\text{K}$ )とジェットバルク速度( $v_z = 0.15c$ )の等価面を書いており、それぞれ電子温度がジェットと星間ガスとの境界面を、速度等価面がビーム領域を表している。(b) 同時刻におけるイオン温度と電子温度の比の  $x = 0[\text{pc}]$  における  $yz$ -面スナップショット。

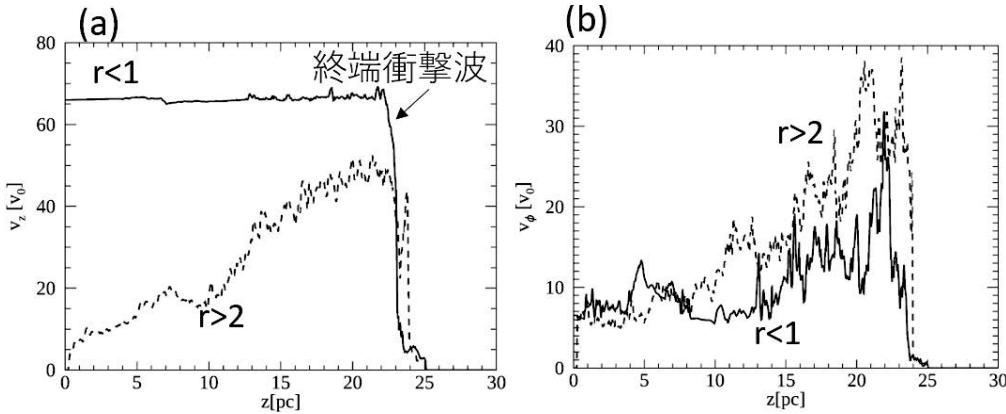


図 2 : (a)  $t = 1045$  年における  $z$  進行方向速度絶対値  $v_z$  の  $z$  方向プロファイル。実線は、ジェット軸中心から半径 1pc 内側における  $v_z$  の最大値を、点線は、2pc より外側における  $v_z$  の最大値をプロットしている。(b) (a)と同じだが、方位角方向速度絶対値  $v_{\phi}$  をプロットしている。

図 1(a)に数値計算最終時刻  $t = 1045$  年における 3 次元の電子温度とジェット進行方向速度の等値面と磁力線を示す。本計算で得られたジェットの形態は、3 次元 MHD ジェット伝播の先行研究と概ね一致している(e.g., Massaglia et al. 2018, Mignone et al. 2010)。半径 1pc で注入したジェットビームは、変位 0.1pc 程度の膨張・圧縮を繰り返しながらジェットと星間ガスの境界面まで伝播する。ビーム先端に形成される終端衝撃波(リバースショック)にて、運動エネルギーの大きな散逸が生じる。熱化されたガスは、バックフローと共に伝播し、ビームの周りを高温ガスが繊上に包み込むコクーンを形成する。初期条件として、ガスに角運動量を与えていたことで、ガスはコクーン内でも角運動量を持ったまま伝播し、ビームを巻きつくようならせん状の磁場構造をしている。特に、ジェットの中腹あたりに磁力線が密集していることがわかる。図 1(b)は、同時刻におけるイオン温度と電子温度の比の  $x = 0$  における  $yz$ -面スナップショットである。この結果は、Ohmura et al. (2019) と同様の分布をしている。電子とイオンは、ビームの内部衝撃波や先端衝撃波、さらにはバウショック(先端衝撃波)で、優先的にイオンが加熱することで温度乖離を起こす。そのため、コクーンでは、5-10 倍イオンが電子よりも高温となる。また、バウショックとコクーンの境界の星間ガスが圧縮された領域では、高密度であるため他の領域より緩和時間が短いが、シミュレーション時間内では電子とイオンが温度平衡に達するまでには至っていない。

次に、コクーン内に形成されるらせん構造について議論する。本計算では、先行研究と異なり、ジェットに方位角方向速度(角運動量)を与えていた。ビーム内  $z$  方向速度は、注入速度である  $0.2c = 66v_0$  を維持するが、内部衝撃波による散逸によってわずかに減速している。さらに、 $z = 23\text{pc}$  における終端衝撃波によって、バルク速度は、注入速度の 10 パーセントまで減速する。一方で、ビーム進行方向(+ $z$  方向)とは逆向きの速度を持つバックフローが形成されており、その大きさは注入速度の 60 パーセント程度の比較的早い流れである(図 2(a))。バックフローは、10pc 付近で減速しており、この位置は図 1(a)の磁束が溜まっている箇所と一致している。対して、方位角方向速度は、ビームの伝播と共に徐々に加速されていることがわかる(図 2(b))。バックフローガスは、注入した最大方位角方向速度よりも 3-5 倍程度大きい速度を持つ。0-5pc では、バックフローは  $z$  方向・方位角方向速度共に弱まっている。これは、コクーンと星間ガ

スとの速度シアによるケルビンヘルムホルツ不安定によって渦形成が促進され、散逸によって運動エネルギーが熱エネルギーへと変換されることが原因である。

#### 4-2. 観測的可視化

本節では、数値計算で得られた物理量から輻射輝度図を作成し、擬似観測を行う。マイクロクエーサージェットでは、系内ジェット天体 SS433 においてシンクロトロン放射が起源と考えられる電波放射や制動輻射が起源であると考えられる熱的 X 線の詳細な観測が行われている (Dubner et al. 1998, Brinkmann et al. 1996)。輻射輝度図作成において、ジェット・星間ガスは光学的に薄く吸収・散乱の影響は無視できるとする。また、電波放射起源であるシンクロトロン放射は、数値実験によって得られる熱的な電子分布ではなく、非熱的な電子な分布に依存するが、本課題では非熱的電子からの放射強度は熱的電子分布に比例すると仮定した。

式(9, 10)で得られる各グリッドにおける輻射強度を視線方向で積分することで観測量である表面輝度  $I$  を求める。図 3 にシンクロトロン放射強度と制動放射の表面輝度分布を示す。本計算では、ジェットの見込み角は  $90^\circ$ とした。シンクロトロン放射の表輝度分布には、ジェット先端に非常に明るいホットスポットが形成されていることがわかる。15-20pc では、非常に低密度な領域となるため放射のない中空領域があることがわかる。一方で、シンクロトロン放射は、磁束がたまる 10pc 付近に、帯状の構造を形成することがわかる。このような、帯状の構造は、SS433 ジェットの東ロープにおける電波観測結果と酷似している。観測本計算では星間ガスは磁化させていないため、シンクロトロン放射強度は 0 となることに注意されたい。一方で、制動放射は、ガス密度の 2 乗に比例するため、縁近傍での放射が卓越する。また、シンクロトロン放射同様に、15-20pc あたりに形成される中空領域では、相対的に放射が弱いことが見て取れる。シンクロトロン放射・制動放射とともに、内部衝撃波付近で特に強い放射は見られないことがわかる。

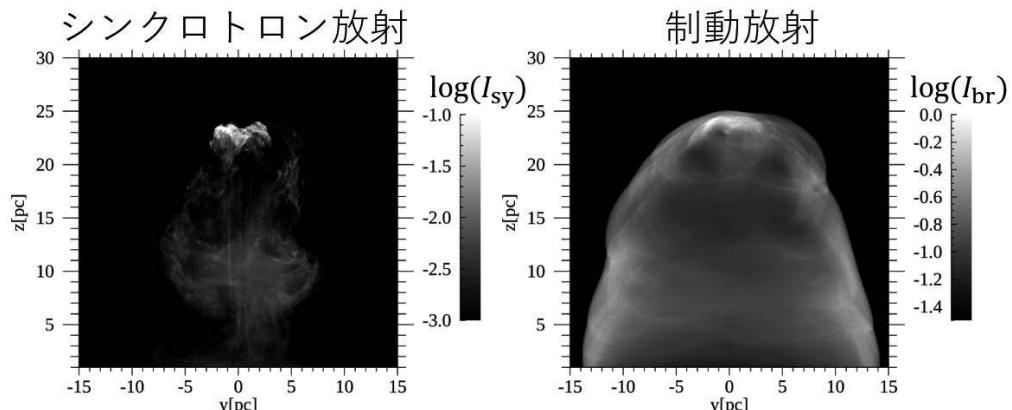


図 3 :  $t = 1045$  年におけるシンクロトロン放射(左)と制動輻射(右)の放射輝度分布。ジェットの見込み角を  $90^\circ$  とし、最大値で規格化している。

#### 5.まとめ

Oakforest-PACS を用いて 3 次元での電子-イオン 2 温度 MHD ジェット伝播シミュレーションとポストプロセスによる輻射輝度図の作成を行った。前回(平成 29 年度インターーン)の報告から新たな物理として、衝撃波における電子加熱、熱的電子からのシンクロトロン放射を追加した。

以下、本課題によって得られた結果をまとめます。

- ・内部衝撃波・先端衝撃波で生じる散逸によって、伝播と共に方位角方向速度は上昇する。
- ・電子加熱を考慮した場合でも、ジェット内部では、イオンと電子が乖離した2温度ガスで満たされる。
- ・シンクロトロン放射輝度分布は、ホットスポットと帯状の構造を持つ。
- ・制動放射輝度分布は、縁近傍での放射が卓越する。
- ・計算速度は、高バンド幅メモリのMCDRAMに用いることで、不使用の場合と比較すると、コードがおよそ1.2-1.3倍高速化した。

今後は、さらに計算領域を拡大したシミュレーションを行う他、不足している物理である特殊相対論の導入や非熱的電子分布時間進化をコードに取り入れる予定である。

### 謝 辞

本研究は「東京大学情報基盤センター 平成30年度若手・女性利用推薦課題(前期)」及び「学際大規模共同利用・共同研究拠点(JHPCN)萌芽型共同研究課題」における採択課題「シンクロトロン放射を取り入れた二温度磁気流体計算による3次元ジェット伝搬シミュレーション」によって行われたものです。また、本研究における数値実験は、東京大学情報基盤センターのOakforest-PACSを使わせていただきました。

### 参考文献

- Brinkmann W., Aschenbach B., Kawai N., 1996, A&A, 312, 306  
Dedner A., Kemm F., Kroner D. et al., 2002, JCoPh, 175, 645  
Dermer, C.D., Liang, E.P., Canfield, E. 1991, ApJ, 369, 410  
Dubner G. M., Holdaway M., M., Goss W. M. et al., 2001, ApJ, 561, 1027  
Ghavamian P., Schwartz S., Mitchell J. et al. 2013 Space Sci Rev (2013) 178, 633-633  
Massaglia S., Bodo G., Possi P. et al., 2018, A&A, 621, A132  
Matsumoto et al., 2019, Publ. Astron. Soc. Japan  
Mignone A., Rossi P., Bodo G., et al., 2010, MNRAS, 402, 7  
Miyoshi T., Kusano K., 2005, JCoPh, 208, 315-344  
Ohmura T., Machida M., Nakamura E. K. et al. 2019, Galaxies, 7(1), 14  
Resseler S.M., Tchekhovskoy A., Quataert E. et al., 2015, MNRAS, 454, 1848-1870  
Ryu D., Kang H., Hallman E., Jones T. W., ApJ, 2003, 593, 599  
Sadowski A., Wielgus M., Narayan R et al., 2017, MNRAS, 466, 705  
Stepney, S., & Guilbert, P. W. 1983, MNRAS, 204, 1269  
Svensson, R. 1982, ApJ, 258, 335