

臨界レイノルズ数付近における矩形ダクト乱流中の二次流れと熱的制御

関本 敦

岡山大学学術研究院 環境生命自然科学学域

1. はじめに

矩形ダクトなど角を有する真っ直ぐな流路を流体が流れるとき、断面内のレイノルズ応力の不均一性により、主流に対して垂直な面内に角へと向かう平均二次流れが生じる。これはプラントルの第二種二次流れと呼ばれ、主流に対して数%の大きさであるが平均流速分布に影響を及ぼし、熱や物質の輸送に大きな影響を与える。

ダクト底面の加熱がプラントルの第二種二次流れに与える影響を調べた研究 [1] では、比較的低レイノルズ数において十分に発達した乱流の平均二次流れが、よく知られた二次流れパターンから、浮力（自然対流）による二次流れパターンへと劇的に変化するようすを定量的に示した。系を支配するパラメータは、慣性力と粘性力の比であるレイノルズ数 (Re) に加え、慣性力と浮力の比であるリチャードソン数 (Ri), そして、プラントル数 (Pr) があり、すべてを網羅するには多くの計算をする必要がある。また、高プラントル数においては、粘性拡散よりもスカラー拡散の時間スケールが遅く、温度の拡散スケールはより小さくなるため、より細かいメッシュが必要となり、計算コストも多くかかる。

臨界レイノルズ数付近における二次流れを調べた研究 [2] では、乱流渦が側壁の影響を大きく受けるために、平均二次流れは4つ渦の二次流れパターンとなることが知られており、(図 1(a,b)) 2つの異なる4つ渦パターンが重なって、平均的によく知られた8つ渦パターンとなる(図 1)。また、遷移レイノルズ数付近においては、局在乱流パフ構造が生じるため管路内の現象が多岐に渡り、過去のダクト内の複合対流の研究 [3] では、臨界レイノルズ数付近は調査対象としていない。そこで、本研究では、遷移レイノルズ数付近における、特異的な乱流状態（4つ渦状態の乱流、乱流パフ）が生じる領域を対象とし、レイノルズ数、リチャードソン数、プラントル数を変えた網羅的な計算を行い、臨界レイノルズ数付近における矩形ダクト内二次流れに底面加熱が与える影響を調べ、ダクト内の二次流れの熱的制御の可能性を調査した。

2. 数値計算手法

図 2 のような、幅 $H (= 2h)$ の正方形ダクト内の流れを考え、平均バルク速度を $u_b = Q/H^2$ (Q は平均流量)、ダクト上面と底面の温度差を $\Delta T = T_H - T_L$ とする。遷移レイノルズ数において、流れ方向に局在した乱流パフを再現するためには、流れ方向の計算領域を十分に長く取る必要がある。本研究では過去の研究 [1] の 10 倍の長さの $L_x/h = 40\pi$ とした。無次元化された支配方程式は

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{u}} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{1}{Re_H} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{u}} + Ri \tilde{T} \mathbf{e}_y \quad (1)$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{T} = \frac{1}{Pr Re_H} \tilde{\nabla}^2 \tilde{T} \quad (3)$$

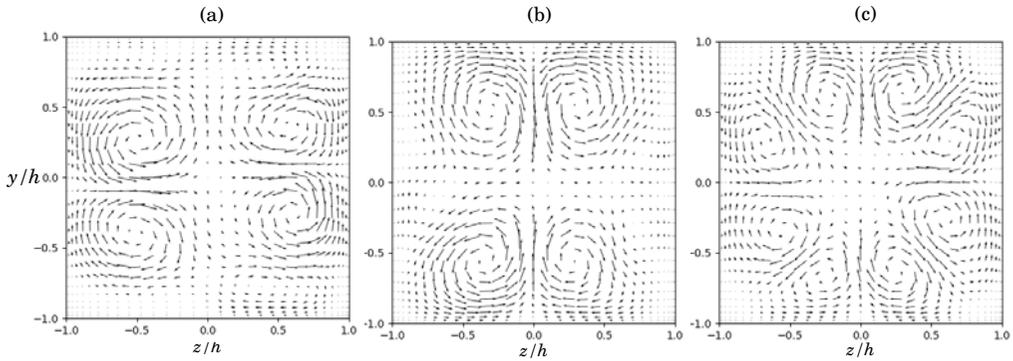


図1 平均二次流れベクトル, $Re_H = 2200$, $Pr = 0.7$, $Ri = 0.02$ (下壁面加熱): (a) 左右壁面に渦対が存在する4つ渦パターン; (b) 上下壁面に渦対が存在する4つ渦パターン; (c) 8つ渦パターン.

である。ここで, $\tilde{t} = t/(H/u_b)$, $\tilde{\nabla} = H\nabla$, $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/u_b$, $\tilde{p} = p/(\rho u_b^2)$, $\tilde{t} = (T - T_0)/\Delta T$ とする。また, 式(1),(2),(3)に現れる3つの無次元化パラメータ, バルクレイノルズ数 (Re_H), プラントル (Pr) 数 (Pr), リチャードソン数 (Ri) は以下のように定義する。

$$Re_H = \frac{u_b H}{\nu} (= 2Re_b), \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad Ri = \frac{g\beta\Delta TH}{u_b^2} \quad (4)$$

本研究の乱流の直接数値計算にはフーリエ級数展開とチェビシェフ多項式を適用した擬スペクトル法を用いる。スペクトル法による正方形ダクトの直接数値計算 (DNS) のアルゴリズムと並列化の方法については, 過去の記事で [4] で詳細に述べた。乱流渦を十分に解像するために壁面近傍に格子を細かく切る必要がある, 刻み時間ステップの制約を緩和するために, 粘性項は時間に対して陰的に取り扱い, 流れの時間発展の反復ごとに速度と圧力のポアソン方程式を解く。ある時刻での3次元の速度と圧力場については, 管軸方向にフーリエ級数展開をすることで, 速度と圧力の各フーリエ係数について, 2次元の Helmholtz 方程式を得る。これを適切な境界条件の下でこれらは高速対角化法 [5] を用いて解く際に, 行列積の演算を必要とする [6]。

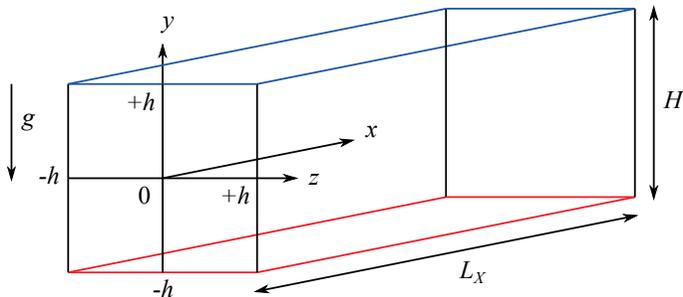


図2 The computational domain and the coordinate system.

3. 4つ渦状態の安定化と乱流パフの消失

ダクト乱流に慣性力と浮力の大きさが拮抗する $Ri = 0.02$ 程度の加熱を与えると、図 1(a) のパターンの4つ渦状態（左右壁面に渦対がある状態）が安定化される。その詳細なメカニズムは、現在調査中であるが、背景には Navier–Stokes 方程式の不変解（不安定平衡解）の分岐構造が浮力によって大きく変化したものと考えられる [7]。

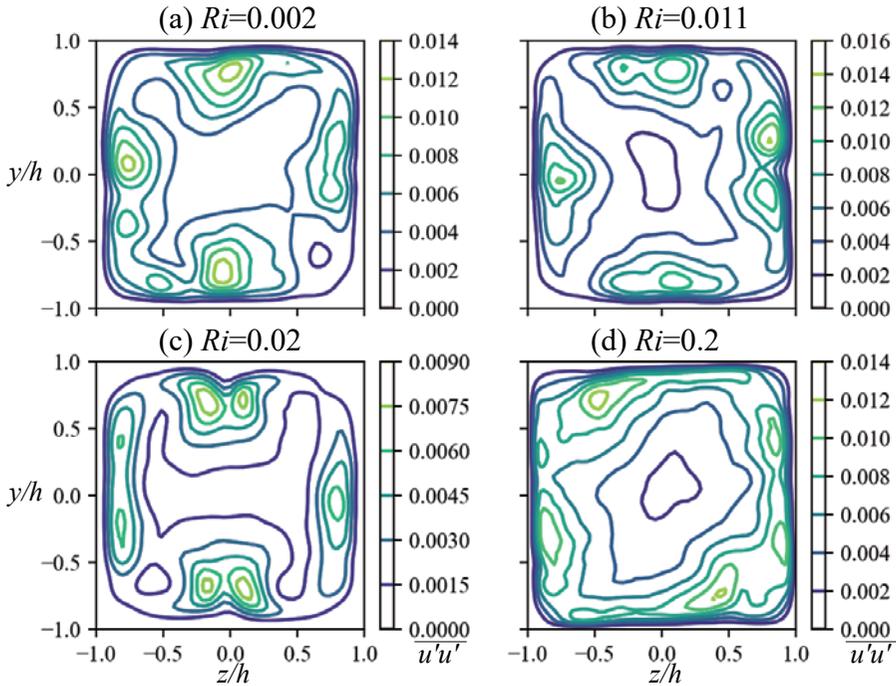


図 3 乱流エネルギー（流れ方向速度成分）， $Re_H = 2200, Pr = 0.7$ ($L_x/h = 4\pi$): (a) $Ri = 0.002$; (b) $Ri = 0.011$; (c) $Ri = 0.02$; (d) $Ri = 0.2$. 左から，上冷却壁面 ($y/h = +1$)，下加熱壁面 ($y/h = -1$)，左側壁 ($z/h = -1$)，右側壁 ($z/h = +1$)。

図 3 は，流れ方向速度の変動を各 Ri 数に対して示した。(a,b) は 8 つ渦状態のもの，(c) が 4 つ渦状態，(d) が浮力によって生じる対流支配の二次流れのものである。二次流れの変化とともに速度変動の分布が大きく変わるのは過去の研究 [1] と同様であるが，(c) については速度変動の大きさ（カラーマップの最大値）が極端に下がっている。これは，下壁面からの熱の流入が 4 つ渦状態を安定化させて，乱流中の秩序渦の乱れも抑制されているためである。このことを乱流構造に着目して示すために，低速ストリークを表す特徴点を流れ方向平均の壁面せん断応力の極小点として抽出し，その位置の確率密度関数を図 4 に示す。図 4(c) ($Ri = 0.02$) に示すように，側壁にシャープな分布が見られ，4 つ渦状態が比較的安定的に存在していることがわかる。

さて，本当に 4 つ渦状態の 1 方のみが安定化されるのかどうかを調べるために，初期条件を図 1(b) の二次流れを示す乱流状態にして（速度場を管軸まわりに 90 度回転させ），長時間の DNS を実施した。Uhlmann ら [2] と同じの 4 つ渦の指標を以下のように定義し，時間に対してプロッ

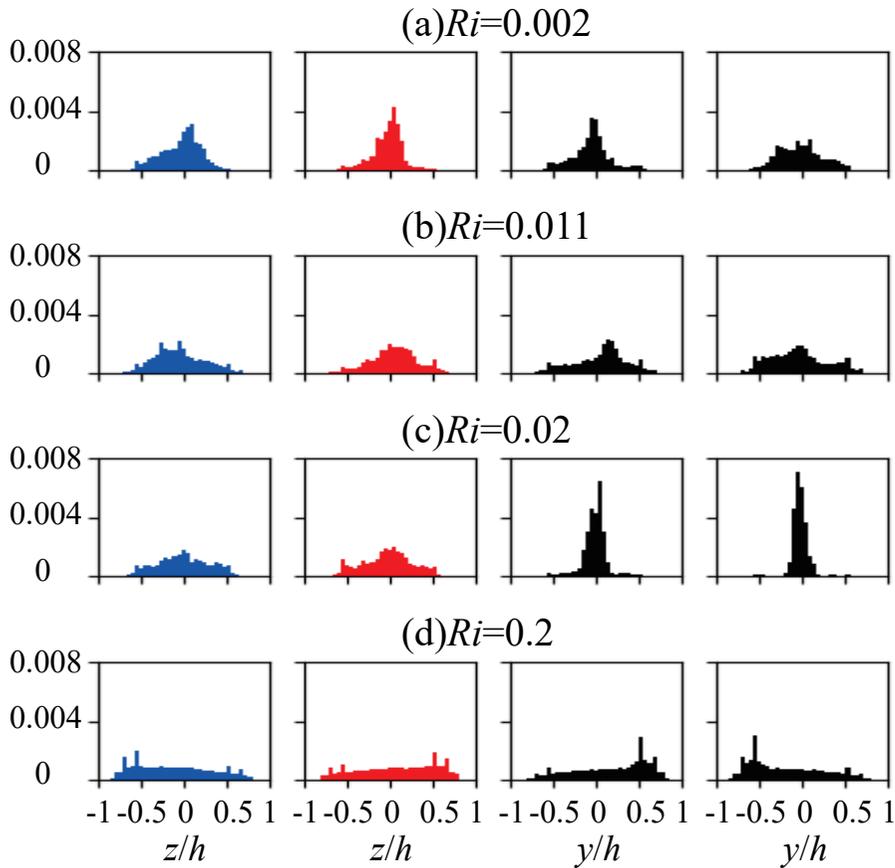


図4 抽出した低速ストリークの位置の確率密度関数 (PDF), $Re_H = 2200$, $Pr = 0.7$ ($L_x/h = 4\pi$): (a) $Ri = 0.002$; (b) $Ri = 0.011$; (c) $Ri = 0.02$; (d) $Ri = 0.2$.

トしたものが図5である.

$$I(t) \equiv \frac{S_1 + S_3 - S_2 - S_4}{S_1 + S_3 + S_2 + S_4}$$

ただし,

$$S_i = \iint_{\Omega_i} \langle \omega_x \rangle_x^2 dy dx$$

$$\Omega_1 : \{(y, z) | y < z \cap y < -z\}, \quad \Omega_3 : \{(y, z) | y > z \cap y > -z\}$$

$$\Omega_2 : \{(y, z) | y < z \cap y > -z\}, \quad \Omega_4 : \{(y, z) | y > z \cap y < -z\}$$

また, 図6(a)は初期状態近辺の流れ方向平均二次流れで $I(t) \approx 0.5$ を示している. (b)は $I(t) \sim 0$ (8つ渦状態), そして, (c)は最終的に安定化された二次流れパターンである. $2000 h/u_b$ もの長時間をかけてゆっくりと状態遷移することがわかる. 4つ渦状態は比較的安定ではあるが, 状態が落ち着くまでには非常に長い時間がかかることが示唆された.

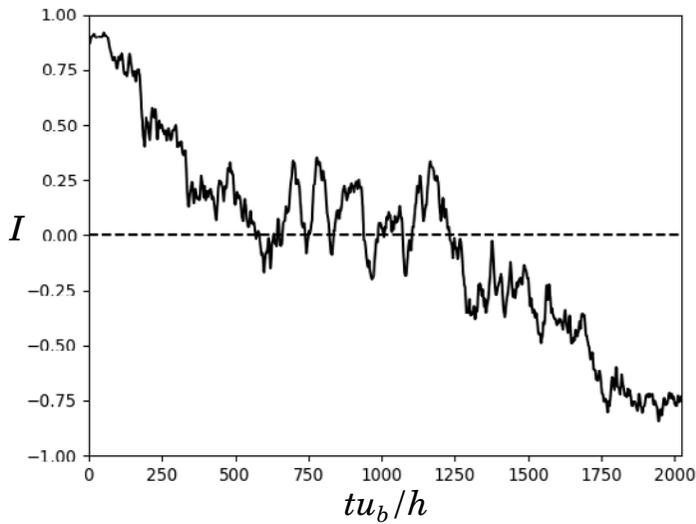


図5 4つ渦の指標の時間変化. 初期状態は図1(b)の上下壁面近傍に渦対がある4つ渦状態を用いた.

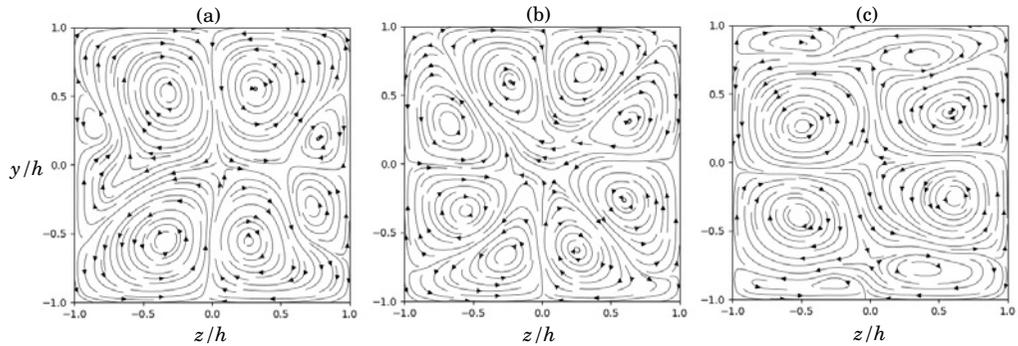


図6 流れ方向平均した二次流れの流線ベクトル, $Re_H = 2200$, $Pr = 0.7$, $Ri = 0.02$: (a) $tu_b/h = 183$, $I = 0.52$; (b) $tu_b/h = 829$, $I = -0.08$; (c) $tu_b/h = 2024$, $I = -0.73$.

4. まとめ

正方形ダクト流れの乱流遷移領域において得意な乱流状態が生じ、浮力と慣性力が拮抗するリチャードソン数を選べば、乱流パフ状態が消失することも確認できた. 表1-3に異なるレイノルズ数 $Re_H = 1600-2200$, リチャードソン数 $Ri = 0.002-0.2$, および、プラントル数 $Pr = 0.07, 0.7, 7$ における遷移乱流の状態をまとめた. 8-vortex は通常の8つ渦状態の二次流れ; 4-vortex は図1(a)のパターンの二次流れ; puffs は乱流(平衡)パフ状態で (\cdot) は流れ方向に局在した乱流パフの数を表す(乱流パフが存在できる数については、管軸方向の計算領域の取り方に依存する). $Pr = 0.07$ では $Ri = 0.02$ でも4つ渦状態が生じず、より高い Ri で生じるようである. また、水に相当する $Pr = 7$ においては、 $Ri = 0.1$ あたりで4つ渦が確認できた. より詳細な分類表を作成すること

表1 4つ渦か8つ渦状態, またはパフの分類表, $Pr = 0.07$.

Re_H	Ri					
	$Ri = 0.002$	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1
2200	8-vortex			8-vortex	buoyancy-induced (b.-i.)	
2000	puffs			8-vortex	b.-i.	
1800	Laminar			Laminar		

表2 表1と同様. ただし, $Pr = 0.7$.

Re_H	Ri					
	$Ri = 0.002$	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1
2200	8-vortex		8-vortex	4-vortex		b.-i.
2000	puffs (2)	puffs (2)	a puff	8-, 4-vortex	4-vortex	b.-i.
1800	a puff	a puff	a puff	a puff	4-vortex	b.-i.
1600	a puff	Laminar	Laminar	Laminar	4-vortex	4-vortex/b.-i.

表3 表1と同様. ただし, $Pr = 7$.

Re_H	Ri					
	$Ri = 0.002$	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1
2000	a puff	a puff	a puff	a puff	a puff, 4-vortex	4-vortex
1800	a puff	a puff	a puff	a puff	a puff	4-vortex
1600	a puff	a puff	a puff	a puff	a puff	a puff, 4-vortex

で, より高精度の制御指針を得ることができるものと考えられる. また, 4つ渦状態の遷移を早める制御手法の開発についても検討している. 最近のデータ駆動型の制御手法や, 背景にある平衡解の分岐構造の解明が, 非線形性の強い乱流の制御を効果的に行う為に必要不可欠である.

謝辞

本研究での計算は, 東京大学情報基盤センター若手利用 (2022 年度) の援助を受け, Wisteria/BDEC 01 Odyssey を利用した

参考文献

- [1] A. Sekimoto, G. Kawahara, K. Sekiyama, M. Uhlmann, A. Pinelli, *Phys. Fluids* **23**, 075103 (2011).
- [2] M. Uhlmann, A. Pinelli, G. Kawahara, A. Sekimoto, *J. Fluid Mech.* **588**, 153 (2007).
- [3] A. Pinelli, M. Uhlmann, A. Sekimoto, G. Kawahara, *J. Fluid Mech.* **644**, 107 (2010).
- [4] 関本敦, 河原源太, M. Uhlmann, P. Alfredo, 東京大学情報基盤センター, スーパーコンピューティングニュース **10 (5)** (2008).
- [5] P. Haldenwang, G. Labrosse, S. Abboudi, *J. Comput. Physics* **55**, 115 (1984).
- [6] 関本敦, 東京大学情報基盤センター, スーパーコンピューティングニュース: 特集号: 2020 年度「若手・女性利用者推薦」前期・後期課題 成果報告 **23 (5)** (2021).
- [7] S. Okino, M. Nagata, H. Wedin, A. Bottaro, *J. Fluid Mech.* **657**, 413 (2010).