ガラスが示すせん断誘起臨界性と Gardner 相の類似性についての数値的研究

大 山 倫 弘

東京大学総合文化研究科（研究当時）

（現 株式会社豊田中央研究所）

1. はじめに

ガラス転移は様々なソフトマター系で普遍的に観察される現象であり[1-3]，過去数十年にわたりその転移に関連した非自明な現象の数々が精力的な研究の対象とされてきた． ガラス転移・あるいはその結果得られるガラスについての理論的な理解の完成には未だ至っていないが，着実に理解の進展は得られている． たとえば，2010 年代後半頃からガラスの普遍的特徴の一つとして**限界安定性**と呼ばれる性質が注目され始めた[4]．これは無限小の歪の下でも塑性変形（ミクロな構成粒子の相互作用ネットワークの非線形な組み換え）を起こしうるというガラス系の特異な性質を指す． 特に，無限次元において厳密な理論となる平均場レプリカ理論は**非 Debye 則**[5]や**Gardner 転移**[6-8]といった限界安定性に関連した様々な性質を予言する．

レプリカ理論の第一の予言，非 Debye 則は振動状態密度の低周波極限に現れる特異性である． 結晶の振動状態密度については Debye 則[9]によって理論的な理解が与えられているが，ガラス系を対象にした理論はいまだ完成していない． レプリカ理論[5]によると，低周波極限においてガラス系は Debye 則で記述される通常のフォノンモードに加えて特殊なモードを持ち，それらのモードはフォノンとは異なる$D(\omega) \sim \omega^2$という冪則に従うと予言されている． これを非 Debye 則と呼ぶ． 有限次元においては，これらのモードは局在化しており塑性変形の素過程に対応している[10]． つまり低周波域での冪則は熱力学極限では無限小のエネルギー注入で励起される塑性変形モードが存在することを示唆する． 多くの数値的研究により実際に低周波極限の振動状態密度の計測が行われ，多岐に渡る系で普遍的にこうした局在化した振動モードが非 Debye 則に従うことが確認された[11-16]． 数値的に観測される冪則は$D(\omega) \sim \omega^4$であり，指数の値は一般的な理論的予測が与える$D(\omega) \sim \omega^2$[5,17]とは乖離している（一部の理論では数値計算結果と整合的な冪則が得られる[18,19]）が，冪則に従うという重要な定性的側面では一致しており，非 Debye 則の存在自体は確立された知見となっている． また，せん断外場に対する応答を通じた直接の塑性変形の測定も行われており，塑性変形を引き起こすのに必要な歪みの平均値$\langle\delta\gamma\rangle$がシステムサイズ$N$の冪的な減少関数として$\langle\delta\gamma\rangle \sim N^{-\chi}$（指数$\chi$は$\chi \approx 2/3$）のように振る舞うことも知られている[20,21]．

レプリカ理論による二点目の予言は熱力学的な『相転移』に関係している． ガラス系がパラメータ空間中で特定の境界を超えると，**完全なレプリカ対称性の破れ**という現象を経て，ほとんど同じ構造が異なる準安定状態を形成するようになる[8]（図 1）．転移の結果現れたこの特別な限界安定ガラス相は通常の安定ガラス相とは区別して**Gardner 相**と呼ばれる． Gardner 相では無限小の擾乱の下で，ほぼ同じ構造を持った準安定

状態間の遷移が観察される．自由エネルギー地形描像では，各メタベイスン内での無限の階層性を持ったサブベイスンの出現としてこの転移を理解することができる（一般に通常のガラスが持つ準安定状態に対応した谷底を**メタベイスン**，Gardner 相で現れる準安定状態に対応したものを**サブベイスン**と区別する：図1）．Gardner 相を検出するには臨界的な性質，つまり適切に定義された相関長や感受率の発散が重要な要素である．いくつかの研究で，有限次元の剛体球系でも実際にそうした性質の測定に成功し，Gardner 相の存在が確認された[22,23]．しかし，Gardner 相に対応したパラメータ空間へのアクセスは一般には困難であり，これまでに Lennard-Jones 系などの代表的なガラス形成系で有限次元において Gardner 相の明確な検出に成功した例はない[24-26]．そのため，普遍性が確立された非 Debye 則とは対照的に，Gardner 相の普遍性についてはいまだ結論は与えられていない[27]（低次元では転移がクロスオーバーになるが Gardner 的な性質が普遍的に観察されうるという学説も近年提案された[28,29]）．

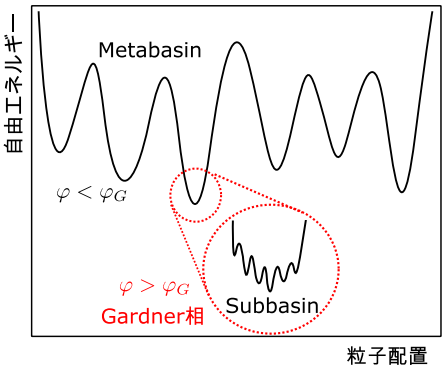

図 1. 自由エネルギー地形上での Gardner 転移の概念図．縦軸は自由エネルギー，横軸は粒子配置を表す．Gardner 転移前は自由エネルギー地形がメタベイスンのみで構成されるが，転移後は各メタベイスン内に無限の階層性を持ったサブベイスンが現れる．

本研究ではせん断外場下でガラス系が示す臨界的挙動と Gardner 相との定性的な類似性を調べた．上述の通り限界安定性には異なる側面が存在するが，無限次元の平均場理論の予言とは異なり，有限次元系ではこれら異なる側面の一部のみが観察される状況が多く存在する．本研究では，異なる側面がいずれも塑性変形で特徴づけられる点に注目し，塑性変形が示す特性の観点から限界安定性を再考する．本紙では主結果に関連した事項のみを簡単にまとめるが，限界安定性の様々な側面についてこの他にも多岐に渡る研究がなされてきている．それらと本研究の結果との関連については文献[30]で網羅的に議論している．

2. 数値計算

2.1 モデルガラス系

本研究では文献[21,31]と同じ，Lennard-Jones ガラス系を扱う．計算負荷軽減の観点からポテンシャルには有限のカットオフ長も導入した．詳細な説明やパラメータ設定は文献[21]に譲るが，カットオフ距離においてポテンシャルと力が滑らかにゼロになるように設定した．本研究で扱うゼロ温度系ではカットオフ距離で不連続性が存在するとアーティファクトが現れるためである[13]．また，結晶化を防ぐために異なる粒径を持った二成分の混合系を扱った．系の密度はガラス的な動力学が観察されるよう十分高密度の値を設定した．初期粒子配置は無限大温度に対応したランダム配置から，無限大の冷却速度に対応するポテンシャルエネルギー最小化により生成した．物理量はすべてミクロなエネルギー単位（ポテンシャルの強さを決定するパラメータ）と平均粒径で無次元化した（本研究では以下に説明する通り準静的過程を扱うため時間の概念が存在せず，2 つの単位のみですべて無次元化できる）．

2.2 準静的せん断外場

以下では熱ゆらぎの存在しない（ゼロ温度）状況で速度ゼロでせん断歪みを印加する，いわゆる athermal quasistatic (AQS)せん断プロトコル[32]下での系の応答を調べる． 速度ゼロの準静的プロセスは微小なせん断歪み$\Delta\gamma(\leq 5\times10^{-6})$の印加と系の全ポテンシャルエネルギーの最小化の繰り返しにより実装される． エネルギー最小化過程には FIRE アルゴリズム[33]を採用した．Lees-Edwards の周期境界条件[34]の下の二次元系を扱う．

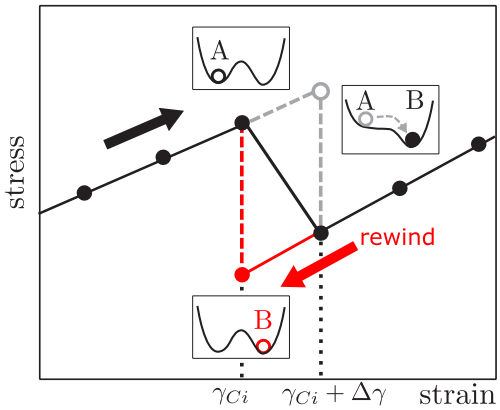

図 2. 応力歪み曲線上での巻き戻し法の概念図． 黒線で示した過程は通常のせん断印加過程であり，赤色が巻き戻し過程を示す． 灰色は塑性変形による遷移過程を示す（この図では i 番目の塑性変形を仮定している）． 塑性変形は臨界歪みγ_Ci で発生する． 塑性変形前後の状態は A, B によって表した． インセットは各状況に対応するポテンシャルエネルギー地形上のポンチ絵を示す． 本図は英国王立化学会の許可を得て文献[30]から一部変更した上で引用した．

せん断外場を印加されたガラス系は塑性変形，つまり構成粒子の非線形な配置換えを起こす．特に，AQS せん断下の塑性変形はポテンシャルエネルギー描像ではサブベイスン間（あるいは稀にはメタベイスン間）の状態遷移と捉えられる．本研究ではこうした描像に則り，AQS せん断下の塑性変形を介してポテンシャルエネルギー地形の幾何学的情報を調べる． せん断の印加とともに系の応力やポテンシャルエネルギーは単調に増加していくが，塑性変形発生時にはこれらの物理量が不連続に低下する（図 2）．そのため，塑性変形の発生はこうした応力降下等で検出することができる． 本研究では図 2 のような巻き戻し法を用い，こうした塑性変形の測定を行った． この方法によって，異なるサブベイスン（つまり状態）に対応した安定配置を歪みγ_{Ci}に対応した完全に同一の境界条件の下で比較することができる．

2.3 状態間の平均相対二乗変位

本研究の目的はポテンシャルエネルギー地形が Gardner 相のような階層性を有するか否かを AQS せん断下の塑性変形を介して間接的に定量化・検証することにある． Gardner 相を特徴づけるための『秩序変数』としては，同一条件下で得られる異なる粒子配置（レプリカ）間のオーバーラップ（やその確率分布）が用いられる[35]． 異なる粒子配置間のオーバーラップの定量化指標は複数提案されているが，本研究ではパラメータの導入なしに測定可能な平均相対二乗変位$\Delta_{AB}\equiv\frac{1}{N}\sum_i^N\left(\mathbf{r}_i^A-\mathbf{r}_i^B\right)^2$を採用する． ここで$\mathbf{r}_i^s$は配置$s\in A,B$中の粒子$i$の位置を表し，A および B は図 2 に示したとおり塑性変形前後の状態を指す． レプリカ理論[7,24,35]によると，Gardner 相では臨界的な挙動が観察される． つまり，秩序変数であるオーバーラップに関して適切に定義された感受率がシステムサイズの冪関数として発散されることが期待される． 以下，2 つの状況でこうした性質の有無を確認する．

結果に移る前に本研究で採用した平均相対二乗変位Δ_{AB}について 1 点注意を述べる． Δ_{AB}はレプリカ液体論で用いられるレプリカ間の相対平均二乗変位（以下では$\Delta_{AB}^{\mathrm{replica}}$と呼ぶ）と似てはいるが完全に同一の量で

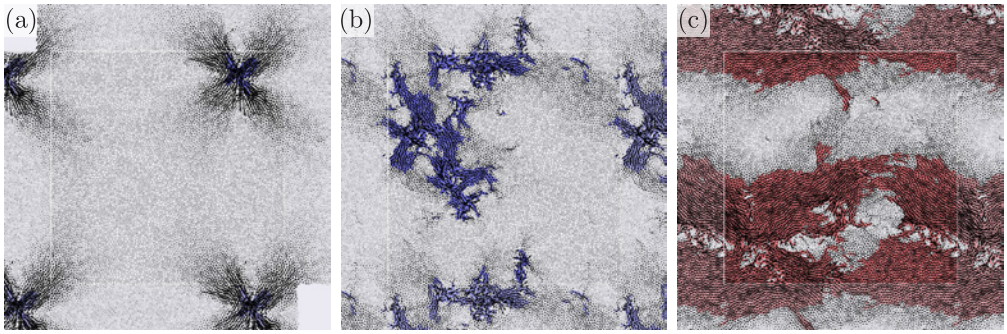

図 3. 塑性変形イベントにより誘起された変位場の可視化. (a) 静止状態アンサンブルのうち，単独の塑性変形素過程だけが励起されたイベントによる変位場. (b) 静止状態アンサンブルのうち$¥Delta_{AB}$が最大だったイベントによる変位場. (c) 定常状態アンサンブルのうち$¥Delta_{AB}$が最大だったイベントによる変位場. いずれもシステムサイズが$N=8192$の系の結果. 矢印が各粒子の変位ベクトルを示しており，矢印の大きさは各イベントごとに視認性を確保できるよう異なる値で規格化されている. 文献[21]の定義に従って，mobile paritcles のみを色付けしている. 白線で囲まれたオリジナルの数値計算ドメインの周囲に，周期境界条件によるコピーセルも可視化している. 本図は英国王立化学会の許可を得て文献[30]から引用した.

はない. 我々の定義Δ_{AB}ではメタベイスン間の jump も含まれてしまう可能性があるが，レプリカ液体論では単一メタベイスン内の dynamics に議論を限定している（**state-following 解析**）. そのため，これら 2 つの平均相対二乗変位の間には概ね$\Delta_{\mathrm{AB}} \geq \Delta_{AB}^{\mathrm{replica}}$という関係が期待される. つまり，$\Delta_{AB}^{\mathrm{replica}}$が Gardner 相に期待される臨界性に対応した system-spanning な性質を示すためには本研究で扱うΔ_{AB}が system-spanning であることが必要条件となる.

3. 結果：臨界的性質の発現

以下では 2 種類のアンサンブルを考え，両者の結果の違いから限界安定性についての考察を行う. 1 つ目のアンサンブルは複数のサンプルを用意し，それぞれにせん断外場を印加し始めて最初に観測される塑性変形のみを集めたアンサンブルである. こうした第一塑性変形は最も強く擾乱なしの静止状態の特性を反映しているため，以下ではこれを静止状態アンサンブルと呼ぶ. 異なるシステムサイズ$N = 512,2048,8192,32768,131072$を扱い，各$N$に対して 4000 の独立したサンプルを用意し，それぞれにおいて第一塑性変形による状態遷移過程の平均相対二乗変位Δ_{AB}を測定した. こうした静止状態アンサンブルはいわゆるアバランチ臨界性は示さないことが知られている[20,21].

2 つ目のアンサンブルでは定常せん断を印加した際に実現される定常状態での塑性変形を対象にする. γを系に印加された歪みとして，LJ ガラス系においてマクロな降伏転移は$\gamma \approx 0.1$程度で起こる[36]. そこで，本研究では$\gamma > 0.25$を定常状態とみなし，この条件下で発生する塑性変形を各システムサイズ（$N = 512,2048,8192,32768$）で 5000 イベント測定した. 以下このアンサンブルを定常状態アンサンブルと呼ぶ. 静止状態アンサンブルと異なり，定常状態アンサンブルはシステムスパンしたアバランチも含むことが知られている[21]. つまり，定常状態アンサンブルはアバランチ臨界性を示す. 図 3(c)にシステムスパンしたアバランチの例として最大の平均相対二乗変位Δ_{AB}が観測されたイベントにより誘起された変位場を可視化

した（参考として図3(a,b)に静止状態アンサンブルのうち単一の塑性変形素過程のみが励起されたイベントと最大のΔ_{AB}を示したイベント中の変位場を可視化した）．

Gardner 相に期待される臨界的挙動の定量化指標の一つとして，平均相対二乗変位のゆらぎの測定を行う． 文献[24]に従い，以下の式で表される非平衡感受率

$$\chi_{\mathrm{AB}} = N\frac{\langle \Delta_{\mathrm{AB}}^2\rangle - \langle \Delta_{\mathrm{AB}}\rangle^2}{\langle {\Delta_{\mathrm{AB}}^i}^2\rangle - \langle \Delta_{\mathrm{AB}}^i\rangle^2},$$

を用いた． ここで$\langle \Delta_{AB}\rangle$は異なる塑性変形イベントについてアンサンブル平均した平均相対二乗変位であり，$\langle \Delta_{AB}^i\rangle = \frac{1}{N}\sum_i^N\langle\left(\mathbf{r}_i^A - \mathbf{r}_i^B\right)^2\rangle$はその一粒子版を意味する． この感受率は集団と一粒子各レベルでの構造変化度合いの比に対応し，協調的に運動する領域の大きさの見積もりを与える．

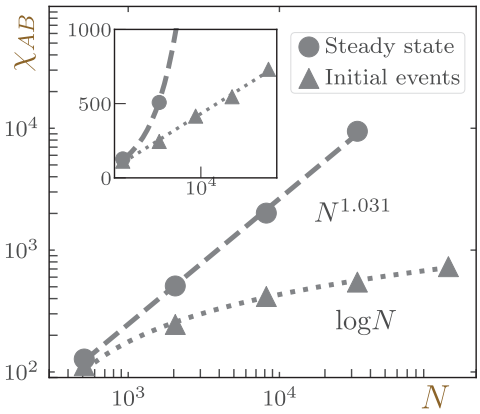

図 4. 感受率χ_AB をシステムサイズ N の関数として示した両対数プロット． ●印は定常状態アンサンブル，▲印は静止状態アンサンブルの結果を示す． インセットは縦軸を線形軸にした片対数プロット． 図中の線は観測結果に対する冪関数および対数関数によるフィッティング結果． 本図は英国王立化学会の許可を得て文献[30]から引用した．

静止状態・定常状態両アンサンブルの結果を図 4 に示した． この図では感受率χ_{AB}をシステムサイズNの関数としてプロットしている． 静止状態アンサンブルではNの増加とともにχ_{AB}が対数発散していることがわかる（対数的挙動はインセットの片対数プロット上での直線的振る舞いからわかる）． この発散は塑性歪み場が 2 次元系で有する長距離相関に起因し[37]，臨界的なシステムスパンした性質が存在しないことを示す． 実際，静止状態アンサンブル中で最大のΔ_{AB}を示すイベントで誘起される変位場をプロットしてみても，系全体に伝達してはいないことがわかる（図 3 (b)：ここではコンパクトなアバランチは形成されており，図 3 (a)で示した単独の塑性変形素過程が励起された場合の変位場とは定性的に異なる）． つまり，静止状態サンプルは Gardner 相とは定性的に異なる性質を持つ． 文献[24-26]では有限次元の非剛体球系の静止状態において Gardner 相の存在については否定的な報告がなされており，我々の結果はこれらと整合的と言える．

一方，定常状態アンサンブルの結果は非自明な冪的発散を示した（図 4 メインパネルの両対数プロット上の直線的振る舞いからわかる）． これはせん断誘起 avalanche 臨界性（降伏臨界性）[20,21]に対応しており，定常状態において塑性変形素過程が連鎖的に発生しシステムスパンしたアバランチを形成することに起因する（図 3 (c)に示した最大Δ_{AB}イベントの可視化結果参照）． こうした感受率の発散はまさに Gardner 相において期待される性質である[7,22,24]．

以上の結果は限界安定性についての重要な示唆を与える． 1 章で紹介したとおり，限界安定性には異なる側面が存在する：ひとつは無限小のひずみの下でも塑性変形を示すというものであり，もう一つは感受率の発散など，Gardner 転移に関連した臨界的な性質である． 文献[20,21,38]で報告されている通り，塑性変形を誘起するのに必要なひずみの平均値$\langle\delta\gamma\rangle$のシステムサイズ$N$依存性は静止状態・定常状態両アンサンブルに

おいて，正の指数χを用いて$\langle\delta\gamma\rangle \sim N^{-\chi}$という冪的な依存性を示すことがわかっている． 換言すると，熱力学的極限では無限小の歪みの下で塑性変形が発生すると期待される． この意味では静止状態・定常状態双方が限界安定性を示すが，我々の結果はひずみに誘起され観察される塑性変形の空間構造は system-spanning な性質の有無の観点で定性的に異なることを示している． 2.3 節で言及した$\Delta_{AB} \geq \Delta_{AB}^{\mathrm{replica}}$という関係を考慮すると，これは定常状態のみが Gardner 相の必要条件を満たすことを意味する． もし，この観測結果が真に有限次元の LJ ガラス系でのせん断誘起 Gardner 転移[39]を意味するならば，上述の 2 つの限界安定性，つまり$\langle\delta\gamma\rangle \sim N^{-\chi}$というスケーリングの成立と Gardner 相に関連した臨界性は異なる機構で発現することになる．こうした描像は非 Debye 則と Gardner 相についての数々の先行研究とも整合的である：前者は普遍的に様々な系で観察されることが確立されている[11-16]一方，後者は限定的な状況でしか確認されていない[22-27]．そのため，有限次元系において限界安定性に言及する際は，より具体的に限界安定性のうちのどういった側面かを明確にする必要がある． 過去の文献ではこうした区別を怠ったため，表面上の様々な矛盾[6,7,22-26,28,29,40-48]が存在するように見えてしまっていた．

4. まとめ

本研究では準静的せん断下の二次元 Lennard-Jones ガラス系を対象に，塑性変形によって遷移する二状態間の平均相対二乗変位を解析した． 特に，サンプルにせん断を印加しはじめて初めに観察される塑性変形のみを集めた静止状態アンサンブルと，定常状態で観察される塑性変形のみを集めた定常状態アンサンブルという，異なる 2 つのアンサンブルで，相対二乗変位が示すゆらぎから定義した感受率χ_{AB}の比較を行った． 静止状態ではχ_{AB}のシステムサイズ依存性が対数発散を示すのに対し，定常状態では冪発散となった． 前者は二次元系特有の歪み場の長距離相関に起因した自明な発散であるが，後者は臨界的な性質を反映している． せん断下で観察される塑性変形がサブベイスン間の（あるいは稀にメタベイスン間の）状態遷移に対応することを考えると，準静的せん断によって非平衡定常状態に駆動されたゼロ温度ガラスが持つポテンシャルエネルギー地形は Gardner 相と定性的に似た臨界性を示すと解釈できる． 本研究での検討はエネルギー地形を直接観測しているわけではないため，必要十分条件の検証にはいたっておらず，Gardner 相とは異なる性質に起因した臨界性が現れている可能性も否定できない． しかし，本研究結果はなぜ有限次元の静止状態では Gardner 相の実現が極めて困難なのかについて解き明かすための新たな道筋を照らすものと期待している．例えば系がせん断下でどのように臨界性を獲得するかといった観点でのアプローチが重要な未解明問題である．

参 考 文 献

[1] L. Berthier, G. Biroli, J.-P. Bouchaud, L. Cipelletti, and W. van Saarloos, Dynamical Heterogeneities in Glasses, Colloids, and Granular Media (Oxford University Press, 2011).

[2] L. Berthier and G. Biroli, Theoretical perspective on the glass transition and amorphous materials, Rev. Mod. Phys. **83**, 587 (2011).

[3] H. Tanaka, H. Tong, R. Shi, and J. Russo, Revealing key structural features hidden in liquids and glasses, Nat. Rev. Phys. **1**, 333 (2019).

[4] M. Müller and M. Wyart, Marginal Stability in Structural, Spin, and Electron Glasses, Annu. Rev. Condens. Matter Phys. **6**, 177 (2015).

[5] S. Franz, G. Parisi, P. Urbani, and F. Zamponi, Universal spectrum of normal modes in low-temperature glasses, Proc. Natl. Acad. Sci. **112**, 14539 (2015).

[6] P. Charbonneau, J. Kurchan, G. Parisi, P. Urbani, and F. Zamponi, Fractal free energy landscapes in structural glasses, Nat. Commun. **5**, 3725 (2014).

[7] P. Charbonneau, Y. Jin, G. Parisi, C. Rainone, B. Seoane, and F. Zamponi, Numerical detection of the Gardner transition in a mean-field glass former, Phys. Rev. E **92**, 012316 (2015).

[8] G. Biroli and P. Urbani, Breakdown of elasticity in amorphous solids, Nat. Phys. **12**, 1130 (2016).

[9] C. Kittel, Introduction to Solid State Physics, 7th ed. (John Wiley; Sons, New York, 1996).

[10] C. Maloney and A. Lemaître, Universal Breakdown of Elasticity at the Onset of Material Failure, Phys. Rev. Lett. **93**, 195501 (2004).

[11] E. Lerner, G. Düring, and E. Bouchbinder, Statistics and Properties of Low-Frequency Vibrational Modes in Structural Glasses, Phys. Rev. Lett. **117**, 035501 (2016).

[12] H. Mizuno, H. Shiba, and A. Ikeda, Continuum limit of the vibrational properties of amorphous solids, Proc. Natl. Acad. Sci. **114**, E9767 (2017).

[13] M. Shimada, H. Mizuno, and A. Ikeda, Anomalous vibrational properties in the continuum limit of glasses, Phys. Rev. E **97**, 022609 (2018).

[14] G. Kapteijns, E. Bouchbinder, and E. Lerner, Universal Nonphononic Density of States in 2D, 3D, and 4D Glasses, Phys. Rev. Lett. **121**, 055501 (2018).

[15] L. Wang, A. Ninarello, P. Guan, L. Berthier, G. Szamel, and E. Flenner, Low-frequency vibrational modes of stable glasses, Nat. Commun. **10**, 26 (2019).

[16] D. Richard, K. González-López, G. Kapteijns, R. Pater, T. Vaknin, E. Bouchbinder, and E. Lerner, Universality of the Nonphononic Vibrational Spectrum across Different Classes of Computer Glasses, Phys. Rev. Lett. **125**, 085502 (2020).

[17] M. Shimada, H. Mizuno, and A. Ikeda, Vibrational spectrum derived from local mechanical response in disordered solids, Soft Matter **16**, 7279 (2020).

[18] E. Bouchbinder, E. Lerner, C. Rainone, P. Urbani, and F. Zamponi, Low-frequency vibrational spectrum of mean-field disordered systems, Phys. Rev. B **103**, 174202 (2021).

[19] C. Rainone, P. Urbani, F. Zamponi, E. Lerner, and E. Bouchbinder, Mean-field model of interacting quasilocalized excitations in glasses, SciPost Phys. Core **4**, 008 (2021).

[20] S. Karmakar, E. Lerner, and I. Procaccia, Statistical physics of the yielding transition in amorphous solids, Phys. Rev. E **82**, 055103 (2010).

[21] N. Oyama, H. Mizuno, and A. Ikeda, Unified view of avalanche criticality in sheared glasses, Phys. Rev. E **104**, 015002 (2021).

[22] L. Berthier, P. Charbonneau, Y. Jin, G. Parisi, B. Seoane, and F. Zamponi, Growing timescales and lengthscales characterizing vibrations of amorphous solids, Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A. **113**, 8397 (2016).

[23] Y. Jin, P. Urbani, F. Zamponi, and H. Yoshino, A stability-reversibility map unifies elasticity, plasticity, yielding, and jamming in hard sphere glasses, Sci. Adv. **4**, eaat6387 (2018).

[24] C. Scalliet, L. Berthier, and F. Zamponi, Absence of Marginal Stability in a Structural Glass, Phys. Rev. Lett. **119**, 205501 (2017).

[25] C. L. Hicks, M. J. Wheatley, M. J. Godfrey, and M. A. Moore, Gardner Transition in Physical Dimensions, Phys. Rev. Lett. **120**, 225501 (2018).

[26] B. Seoane, D. R. Reid, J. J. de Pablo, and F. Zamponi, Low-temperature anomalies of a vapor deposited glass, Phys. Rev. Mater. **2**, 015602 (2018).

[27] L. Berthier, G. Biroli, P. Charbonneau, E. I. Corwin, S. Franz, and F. Zamponi, Gardner physics in amorphous solids and beyond, J. Chem. Phys. **151**, 010901 (2019).

[28] Q. Liao and L. Berthier, Hierarchical Landscape of Hard Disk Glasses, Phys. Rev. X **9**, 011049 (2019).

[29] Q. Liao, L. Berthier, H.-J. Zhou, and N. Xu, Dynamic Gardner cross-over in a simple glass, Proc. Natl. Acad. Sci. **120**, (2023).

[30] N. Oyama, H. Mizuno, and A. Ikeda, Shear-induced criticality in glasses shares qualitative similarities with the Gardner phase, Soft Matter **19**, 6074 (2023).

[31] N. Oyama, H. Mizuno, and A. Ikeda, Instantaneous Normal Modes Reveal Structural Signatures for the Herschel-Bulkley Rheology in Sheared Glasses, Phys. Rev. Lett. **127**, 108003 (2021).

[32] K. Maeda and S. Takeuchi, Computer simulation of deformation in two-dimensional amorphous structures, Phys. Status Solidi **49**, 685 (1978).

[33] E. Bitzek, P. Koskinen, F. Gähler, M. Moseler, and P. Gumbsch, Structural Relaxation Made Simple, Phys. Rev. Lett. **97**, 170201 (2006).

[34] M. P. Allen and D. J. Tildesley, Computer simulation of liquids (Oxford University Press, 1987).

[35] G. Parisi, P. Urbani, and F. Zamponi, Theory of Simple Glasses (Cambridge University Press, 2020).

[36] M. Ozawa, L. Berthier, G. Biroli, A. Rosso, and G. Tarjus, Random critical point separates brittle and ductile yielding transitions in amorphous materials, Proc. Natl. Acad. Sci. **115**, 6656 (2018).

[37] G. Picard, A. Ajdari, F. Lequeux, and L. Bocquet, Elastic consequences of a single plastic event: A step towards the microscopic modeling of the flow of yield stress fluids, Eur. Phys. J. E **15**, 371 (2004).

[38] S. Karmakar, E. Lerner, I. Procaccia, and J. Zylberg, Statistical physics of elastoplastic steady states in amorphous solids: Finite temperatures and strain rates, Phys. Rev. E **82**, 031301 (2010).

[39] C. Rainone and P. Urbani, Following the evolution of glassy states under external perturbations: the full replica symmetry breaking solution, J. Stat. Mech. Theory Exp. **2016**, 053302 (2016).

[40] M. C. Angelini and G. Biroli, Spin Glass in a Field: A New Zero-Temperature Fixed Point in Finite Dimensions, Phys. Rev. Lett. **114**, 095701 (2015).

[41] A. Seguin and O. Dauchot, Experimental Evidence of the Gardner Phase in a Granular Glass, Phys. Rev. Lett. **117**, 228001 (2016).

[42] Y. Jin and H. Yoshino, Exploring the complex free-energy landscape of the simplest glass by rheology, Nature Communications **8**, 14935 (2017).

[43] C. Scalliet and L. Berthier, Rejuvenation and Memory Effects in a Structural Glass, Phys. Rev. Lett. **122**, 255502 (2019).

[44] C. Scalliet, L. Berthier, and F. Zamponi, Marginally stable phases in mean-field structural glasses, Phys. Rev. E **99**, 012107 (2019).

[45] A. P. Hammond and E. I. Corwin, Experimental observation of the marginal glass phase in a colloidal glass, Proc. Natl. Acad. Sci. **117**, 5714 (2020).

[46] L. Kool, P. Charbonneau, and K. E. Daniels, Gardner-Like Crossover from Variable to Persistent Force Contacts in Granular Crystals, Phys. Rev. E **106**, 054901 (2022).

[47] H. Xiao, A. J. Liu, and D. J. Durian, Probing the Gardner Transition in an Active Quasi-Thermal Pressure-Controlled Granular System, (2021).

[48] V. Astuti, S. Franz, and G. Parisi, New Analysis of the Free Energy Cost of Interfaces in Spin Glasses, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **52**, 294001 (2019).