

電磁場解析における数値ソルバのキャッシュ最適化

チューニング

岩下 武史

京都大学学術情報メディアセンター

1. はじめに

本稿では、東京大学情報基盤センターからの依頼に基づき、具体的な応用分野における数値計算を対象としたキャッシュの影響について述べる。一般に、所謂スカラ型の計算機では、キャッシュを効果的に利用することが計算速度に大きな影響を与える。ここでは、著者がこれまでに取り組んできた電磁場解析^{1,2}における線形反復法³を対象として、並列処理に関連したキャッシュの利用性について紹介する。まず、2節において電磁場解析に関する概説を述べ、3節以降では、電磁場解析においてよく用いられる線形反復法である ICCG 法 (Incomplete Cholesky Conjugate Gradient 法)⁴を対象とした2種類のベンチマークについて、その並列化の詳細、数値実験結果について述べる。

2. 電磁場解析

電磁場解析はモータや電子デバイスの設計や評価において産業応用、学術分野において欠くことのできないものとなっている。電磁場解析にはいくつかのカテゴリがあり、線形解析/非線形解析、時間領域/周波数領域、高周波問題/低周波問題等の区別がある。例えば、線形・非線形の解析の違いでいえば、非線形解析にはヒステリシス特性を持つ磁性体を扱うような解析が該当し、例えば鉄心を持つ電磁モータの解析が一例である。時間領域の解析とは、過渡現象等の時間的に変化する電磁場を扱う解析であり、周波数領域の解析とは電磁場が周期的に変化する場合を扱う解析である。次に高周波問題とは、例えば携帯電話やプリント基板から発生する電磁場を扱う問題であり、低周波問題とは実応用例で言えば、50Hz や 60Hz の商用電力で駆動されるモータ等を扱う。こうした各々の区分に対して、一般的によく使われる手法が存在しており、例えば線形の高周波問題を対象とする時間領域解析では FDTD 法が盛んに用いられている。一方、非線形の低周波時間領域問題や線形の高周波周波数領域解析では、辺要素を用いた有限要素法を使用するのが一般的である。有限要素法は電磁場解析のみならず、構造解析や流体の解析等においても広く用いられている手法である。そこで、ここでは有限要素解析について考えていく。

有限要素解析のプロセス (プログラムといってもよい) は以下のような手順による。(1) メッシュ分割 (2) 連立一次方程式の作成 (3) 連立一次方程式の求解 ここで、(1) のメッシュ分割は CAD ソフト等のメッシュ分割ソフトウェアにおいてなされるので、有限要素解析自体は (2) (3) のプロセスによると考えてよい。このうち、解析のほとんどの時間を占めるのが (3) の連立一次方程式の求解である。そこで、有限要素解析の高速化においては連立一次方程式の求解部 (線形ソルバといわれる) の高速化が極めて重要である。

連立一次方程式の求解法には大きく分けて直接法と反復法 (間接法ともいう) がある。一般

によく知られているガウスの消去法, LU 分解法は直接法に該当する。直接法におけるキャッシュチューニングは極めて重要で, 様々な本に述べられている⁵⁾。一方, 有限要素解析で扱う連立一次方程式は疎行列を係数行列とするという特殊な性質を持っている。ここで, 疎行列とは係数行列の大部分の要素が 0 である行列である。例えば, 大規模な解析では, 全体の要素数の 0.1% 以下しか非ゼロの要素がないような解析は珍しくない。こうした疎行列を係数とする連立一次方程式の解法としてはメモリ使用量, 計算時間の点で反復法が有利である。そこで有限要素解析では一般に反復法が使用される。反復法とは, ある初期予想解から出発し, ある種の計算手順を繰り返し適用することにより, 真の解に対して解析上十分な精度をもつ近似解を得る方法である。(従って, 対象とする連立一次方程式によっては近似解が収束せず, 解を求められない場合がある。) 電磁場有限要素解析において最もよく用いられる反復法は ICCG 法である。ICCG 法は係数行列が対称な場合に適用可能な方法である。ICCG 法の反復部分は以下のような計算により構成される。(i) 前進・後退代入計算, (ii) ベクトルの内積計算, (iii) 行列ベクトル積, (iv) ベクトルの更新およびノルムの計算 である。このうち計算量の点で支配的であるのは, 前進・後退代入計算と行列ベクトル積計算である。そこで, 次節以降では, このうち並列化が困難であるとされている前進・後退代入計算を対象として, その並列化とそれに伴うキャッシュのヒット率への影響について述べることにする。

3. ICCG 法の差分解析ベンチマーク

本節では, 有限要素解析とは異なるが, 有限差分解における ICCG 法について述べる。まず, ここで扱う問題は次式で与えられる 2 次元ポアソン方程式の境界値問題である。

$$-\nabla \cdot (\kappa \nabla u(x, y)) = f \quad \text{in } \Omega : (0,1) \times (0,1) \quad (1)$$

$$u(x, y) = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \quad (2)$$

ここで, $0.25 \leq x \leq 0.75$ かつ $0.25 \leq y \leq 0.75$ を満たす領域では κ を 100 とし, それ以外では 1 とした。ここで f は, 格子点を図 1 のように辞書式順序付けで並べた場合の格子番号を k とし, $0.5 \sin(k+1)$ である。未知数の個数は 1001×1001 とする。式(1)を 5 点差分公式により離散化し, 得られる連立一次方程式を ICCG 法により解く。ここで, 解析プログラム上において, 係数行列と前処理行列は辞書式順序付け法に基づきそれぞれ 3 つの一次元配列と 1 つの一次元配列に格納される。疎行列に関連する計算において, データをどのようにメモリ上に確保するかという事は, キャッシュのヒット率や並列実行可能性に大きな影響を与える。そこで, このデータ格納方法について詳細に述べる。まず, 辞書式順序付け法を用いた場合, 係数行列は図 2 に示されるような 5 重対角行列として与えられる。これは, 図 3 にみられるように一つの節点 (○) は上下左右の 4 つの節点 (□) と関係を持ち, 自分自身を含めて 1 行あたり 5 つの要素を持つこと, および, 格子番号 k の左右の節点番号は辞書式順序付けでは $k-1, k+1$ であり, 上下の節点の番号は $k+nx, k-nx$, 但し nx は x 方向の格子点数であることによる。そこで, ここでは係数行列の対称性を考慮して, 行列の上三角部分だけを格納することとし, 格子番号が k の要素に対応する係数行列 k 行目の各要素を $a(k), b(k), c(k)$ に格納する。また不完全コレスキー分解の結果得られる分解行列の対角要素が配列 d に格納されているものとする。このとき, ICCG 法の前進代入計算は図 4 のように与えられる (但し, ny は y 方向の格子点数)。ここで, このプログラムをみると, $z(i)$ を求めるために $z(i-1), z(i-nx)$ の値が必要な値となっている。従って, この前進代入計算はこのままでは並列処理することができず, 後退代入計算についても

同様である。そこで、本稿ではマルチカラーオーダリングを用いることによりこれらの計算を並列化する。マルチカラーオーダリングは並列オーダリング法⁶の1種である。並列オーダリング法とは、節点の番号を並列処理に適した順番に並び替えることにより代入計算の並列処理を可能とする方法である。ここで、マルチカラーオーダリングでは、互いに関係のない節点を複数抽出し、これを一つのグループ(色)とみなす。今回の5点差分解析の場合、互いに関係のない節点とは、お互いに上下左右の隣接節点でない節点を意味する。このとき、各グループ(色)の中では節点は互いに無関係となるため並列処理が可能となる。図5は2色によるマルチカラーオーダリングで赤-黒順序付けと呼ばれる。この場合、(1, 2, 3, 4, 5)の節点が1つの色を構成し、(6, 7, 8, 9)がさらに1つの色を構成する。具体的に代入計算を並列化する場合、このような並列処理可能な順序に節点を陽的に並び替える方法が考えられる。この場合、例えば、図6のような係数行列が得られる。但し、本実装による場合、現在処理している節点の前後左右の節点の色番号と節点番号の取得のために間接アドレッシングが通常必要となる(著者の検討によると直接アドレッシングは不可能ではないが、実装は困難である)。そこで、本稿の解析におけるマルチカラーオーダリングの実装は、Washio, Hayami が文献7に示している間接参照を必要とせず、計算順序のみを入れ替える方法を用いる。その結果、前進・後退代入計算は色数をストライド幅とするストライドアクセスをもつ計算手順により行われる。図7に同手法により並列化した前進代入計算のプログラムを示す。並列処理のAPIとしてOpenMPを使用している。図7において、myidは各スレッドのスレッドIDを表す。また、icolorは色数であり、is(myid), ie(myid)は各スレッドが計算する領域の開始行番号と終了行番号を表す。内側のループが各スレッドで並行的に行われ、その後バリア同期をとる。この操作が色数の数だけ行われる。なお、後退代入計算も同様の手順で並列化される。

ここで、図7のプログラムにおけるキャッシュデータの再利用性について考える。図7のプログラムでは、内側のループにおいてストライドアクセスを用いることにより並列化を可能としている。また、アルゴリズム上、このストライド幅は色数を意味し、色数が多いほど収束性がよい(逐次版の収束性に近づく)という性質がある。従って、ICCG法の反復回数を削減し、全体の計算量を少なくするにはなるべく大きな色数を使用するほうが有利である。一方、ストライドアクセスはキャッシュデータの利用率という点では悪影響を与える。つまり、ストライドの幅を大きくすると、折角キャッシュにデータを保持してもそれらの一部しか使用しない、あるいは全く使用せずにキャッシュ上のデータが置き換わるということが生じる。従って、色数を増加することは本実装では1反復の計算時間を増加させることになる。また、並列性についてはなるべく色数が少ない方が有利である。これは、1色あたりの未知変数の数が最大利用可能な並列度になること、また代入計算については色数に比例した同期が必要となるためである。以上をまとめると、色数の増加は 収束性: 良化, 反復あたりの計算時間(キャッシュ利用率): 悪化, 並列性: 不利 となる。従って、これらを適切に調整することが必要となる。

4. ICCG法の差分解析ベンチマークの数値計算結果

4. 1. 実行環境

本ベンチマークは京都大学学術情報メディアセンターの富士通 HPC2500 (SPARC64V 1.3GHz) 上で行った。プログラムはFORTRAN90により書かれ、並列処理のAPIとしてOpenMPを用いている。コンパイル時の最適化オプションには-Kfast_GP2=3を指定した。また、ICCG法の収束基準

として右辺ベクトルノルムと残差ノルムの比を用い、その値が 10^{-7} 以下となった時点で収束とみなす。

4. 2. 数値計算結果

表 1 に差分解析ベンチマークの結果を示す。なお、表 1 中において計算時間は反復の開始から終了までの間の経過時間を示しており、不完全コレスキー分解などの反復解法部のセットアップ部分の時間は含まれていない。まず、マルチカラーオーダーリング法による並列化 ICCG 法の収束性については、色数を増やすほど向上しており、従来の研究結果と合致している^{8,9,10}。一方、表 2 に 1CPU 時における 1 反復あたりの計算時間と色数の関係を示すが、色数が増すにつれて大幅に 1 反復あたりの計算時間を要していることがわかる。これはストライド幅が増加することにより、キャッシュのヒット率が大きく低下したことによる。2 色の場合と 100 色の場合を比較すると、5 倍以上も計算時間が増加しており、同じ計算量であってもメモリへのアクセスパターンが異なることにより大きな性能差が生まれることがわかる。ベクトル計算機上での実行では、バンクコンフリクトを起こす場合を除けば 1 反復あたりの計算時間は色数に対してあまり変化しないため、高い収束性が得られる（トータルの演算量の少ない）色数の多い場合が有効となるがキャッシュをベースとするメモリ構成をもつ計算機では必ずしもそうとはいえず、注意が必要である。次に、速度向上については概ね高い並列化効率を得ている。特に色数が多い場合にはスーパーリニアな性能を示しており、色数 100 の場合には顕著である。ここで、スーパーリニアな性能とは 1 台の CPU で計算した場合と比べて、N 台の CPU で N 倍以上の速度向上を得る場合を指す。本現象もキャッシュの影響と考えることができる。本ベンチマークでは問題のサイズが固定されており、並列化により各 CPU がアクセスするメモリ領域は使用 CPU が増加するにつれて減少する。その結果、データアクセスの局所性が高まり、キャッシュのヒット率が向上する。本解析におけるプロファイラによる分析では、色数 100 の場合の代入計算ループについて 1CPU 時と 16CPU 時で、L1 キャッシュミス率、L2 キャッシュミス率、TLB ミス率がそれぞれ 23%→1.5%、31%→0.3%、1.86%→0.0031%のように大幅に向上している。即ち、16CPU 時の高い台数効果はキャッシュの利用性が高まった結果といえる。最後に総合的な計算性能を考えると、本解析では色数 100、CPU 数 16 の場合が最もよい結果となった。これは、色数を多くした場合でも十分に各プロセッサが扱うデータサイズが小さい場合にはキャッシュのヒット率が向上し、収束性に優れた色数の多い場合が有効であることを示している。しかし、問題サイズに対してプロセッサ数が十分ではない場合には、最小の色数である 2 色の場合が有効となると考えられる。以下に、スカラ型の並列計算機における注意点をまとめる。

- ・ 演算量だけでなくキャッシュの有効利用についても十分に配慮する必要がある。
- ・ 問題のサイズが固定されている場合には並列化によりデータアクセスの局所化を促進できる可能性があるため、キャッシュのヒット率の改善により大きな効果を得られる可能性がある。

5. ICCG 法の有限要素解析ベンチマーク

本節では、実際の電磁場解析の応用分野で用いられる辺要素有限要素法による 3 次元渦電流場の解析を対象とする。解析対象内の電磁界を記述する方程式は、マクスウェル方程式において変位電流の項を無視することにより与えられる。本解析では、辺要素を使用し、磁気ベクトルポテンシャルのみによる定式化を行う A-法を用いるので、支配方程式は次式で与えられる²。

$$\nabla \times (\nu \nabla \times A_m) = -\sigma \frac{\partial A_m}{\partial t} + J_0 \quad (3)$$

ここで、 A_m は磁気ベクトルポテンシャル、 J_0 は強制電流の電流密度、 ν は磁気抵抗率、 σ は導電率を表す。磁気ベクトルポテンシャルをベクトル補間関数により近似展開し、式(3)にガラ一キン法を適用することにより、次式が得られる。

$$[K]\{A_m\} + [M_A] \frac{\partial \{A_m\}}{\partial t} - \{J\} = \{0\} \quad (4)$$

ここで、 $\{A_m\}$ は未知変数 A_{m_i} からなる列ベクトルを表す。 $[K]$ 、 $[M_A]$ は行列、 $\{J\}$ は列ベクトルを表し、以下のように与えられる。

$$K_{ij} = \sum_{e_m} \iiint_e \nu (\nabla \times N_i) \cdot (\nabla \times N_j) dV \quad (5)$$

$$M_{Aij} = \sum_{e_m} \iiint_e \sigma N_i \cdot N_j dV \quad (6)$$

$$J_i = \sum_{e_m} \iiint_e N_i \cdot J_0 dV \quad (7)$$

ここで、 e は各要素、 e_m は全要素数、 N はベクトル補間関数を表す。未知変数の総数を n として、行列 $[K]$ 、 $[M_A]$ は n 次正方行列、 $\{A_m\}$ および $\{J\}$ は n 次元ベクトルである。式(4)中の時間微分項を後退差分法により解くと、

$$Q\{A_m\} = \{f\} \quad (8)$$

但し、

$$[Q] = ([K] + \frac{1}{\Delta t} [M_A]) \quad (9)$$

$$\{f\} = \frac{1}{\Delta t} [M_A] \{A_{mold}\} + \{J\} \quad (10)$$

の連立一次方程式が得られる。ここで、本稿では解析対象として電気学会3次元渦電流解析モデル¹¹を用いる。表3に解析の諸元を示す。本解析では、解析領域中に非導電性の部分(空気領域)が含まれるため、係数行列 $[Q]$ は半正定値となる。

本解析では、時間発展問題のある1ステップをベンチマーク問題とする。本解析のような辺要素を用いた電磁場解析では、係数行列は正值性を失っている場合がほとんどあり、ICCG法をそのまま用いることができない。そこで、加速パラメータ(シフト量)を1.3としたシフト付きICCG法¹²を用いることとする。

本解析は非構造型の解析であるため、並列化ICCG法ソルバにおける行列・ベクトル積演算や前進・後退代入計算では間接アドレッシングが用いられる。ここでは、係数行列の格納形式として、非対角要素についてはCRS形式を用い、対角要素は別途1次元配列に格納した。また、マルチカラーオーダーリング法の実装については未知変数を陽的に並び替える手法を使用した¹³。このとき、前進代入計算の並列化プログラムは図8のように与えられる。図中において、icspo(ic)はic番目の色の未知変数の開始番号であり、各色毎に代入計算が並列化される。

6. ICCG法の有限要素解析ベンチマークの数値計算結果

ベンチマークの使用計算機、ICCG法の収束判定基準は4.1節で述べた差分解析ベンチマー

クと同様としている。表4に有限要素解析ベンチマークの結果を示す。なお、表中において計算時間は反復の開始から終了までの間の経過時間を示している。まず、色数と反復回数との関係では、40から120程度の色数の変化ではそれほど大きな差はなかった。但し、色数を500以上とした場合には改善が見られることが分かっている。次に、1反復あたりの計算時間については、色数が増大するに従って増加しているが差分解析ほど顕著ではない。これは色数の増加に従ってキャッシュのヒット率が下がることが原因と考えられるが、差分解析と比べて未知変数間のデータ関係が複雑な有限要素解析では元来ランダムアクセスとなっているためにその低下率は小さい。次に並列化効率については全体的に高い値を得ており、マルチカラーオーダリング法の有効性を示している。総合的なベンチマーク性能では、色数40の場合が最も計算時間が短かった。

7. おわりに

本稿では、電磁場を対象とした有限要素解析において最もよく用いられるICCG法を対象に、差分解析と有限要素解析の2種類のベンチマークについて述べた。本解析で扱った疎行列を対象とした計算では、一般的にキャッシュチューニングを効果的に施すことは困難である。これは、データが対象とするモデルに応じてその構造を大きく変える可能性があることや、連続的なデータを扱う場合に比べてブロッキングなどのよく知られたキャッシュチューニングアルゴリズムを適用するのが難しいためである。ただし、本稿で述べたように、並列処理に関連したキャッシュの利用性については注意が必要である。問題のサイズが固定されている場合には、並列処理によって、メモリアクセスの局所化が副次的な作用として得られる可能性があり、並列処理によって一石二鳥の効果が期待できる場合がある。こうした観点からも並列処理については意欲的に取り組む価値があるといえる。また、一般的な応用分野におけるキャッシュチューニングとしては、プログラムをシンプルにかくこと、無駄なメモリを使わないことをあげたい。メモリの階層構造を意識したプログラムは計算機工学の専門家でも手間がかかる仕事である。このような高度なチューニングは困難でも、無駄な作業配列を使わないなどの工夫によりメモリアクセスの局所化の可能性を追求することができる。

7	8	9
4	5	6
1	2	3

図1 3×3の2次元格子における辞書式番号付け

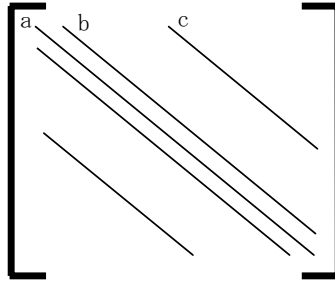


図2 5重対角行列

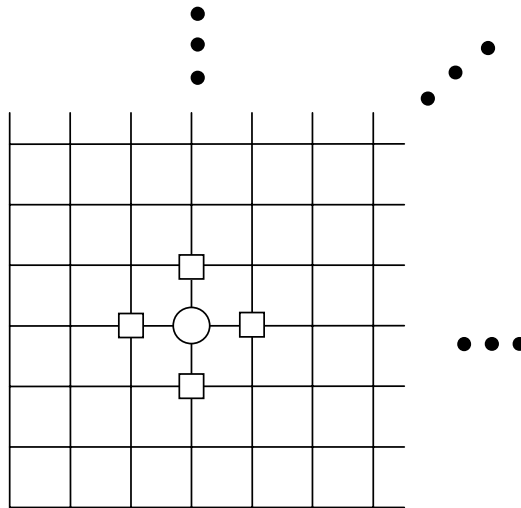


図3 5点差分公式における節点間の関係

```
do i=1, nx*ny
  z(i)=z(i)-b(i-1)*z(i-1)/diag(i-1)-c(i-nx)*z(i-nx)/diag(i-nx)
enddo
```

図4 逐次型前進代入計算

4	9	5
7	3	8
1	6	2

図5 3×3の2次元格子における赤-黒番号付け



図6 3色のマルチカラーオーダーリングによる係数行列

```

!$OMP PARALLEL PRIVATE(myid, i, icolo)
:
do icolo=1,icolor-2
  do i=is(myid)+icolor,ie(myid),icolor
    z(i)=z(i)-b(i-1)*z(i-1)/diag(i-1)-c(i-nx)*z(i-nx)/diag(i-nx)
  enddo
  !$OMP BARRIER
enddo
:

```

図7 マルチカラーオーダーリング法による並列化前進代入計算（差分解析）

表1 差分解析ベンチマーク結果

(a) 色数2の場合

CPU数	計算時間(秒)	反復回数	速度向上
1	248	1600	1.0
2	138	1600	1.80
4	72.3	1599	3.42
8	45.3	1599	5.48
12	27.5	1599	9.03
16	18.9	1600	13.1

(b) 色数4の場合

CPU数	計算時間(秒)	反復回数	速度向上
1	304	1333	1.0
2	176	1332	1.73
4	92.3	1331	3.29
8	61.3	1331	4.95
12	33.3	1332	9.12

16	20.1	1331	15.1
----	------	------	------

(c) 色数 8 の場合

CPU 数	計算時間 (秒)	反復回数	速度向上
1	444	1176	1.0
2	258	1176	1.72
4	136	1176	3.25
8	95.8	1171	4.61
12	43.7	1171	10.2
16	21.7	1174	20.4

(d) 色数 20 の場合

CPU 数	計算時間 (秒)	反復回数	速度向上
1	595	1074	1.0
2	327	1073	1.82
4	185	1070	3.22
8	133	1069	4.47
12	57.8	1068	10.3
16	23.7	1073	25.1

(e) 色数 100 の場合

CPU 数	計算時間 (秒)	反復回数	速度向上
1	773	1012	1.0
2	314	1013	2.47
4	98.1	1012	7.88
8	39.0	1012	19.8
12	23.2	1012	33.3
16	14.6	1012	52.9

表 2 一反復あたりの計算時間と色数の関係

色数	2	4	8	20	100
計算時間 (ミリ秒)	155	228	378	554	764

表 3 有限要素解析ベンチマーク (3次元渦電流解析) の諸元

未知変数の総数	1011920
要素数	327680
節点数	342225

```

!$OMP PARALLEL
:
do icolo=1,icolor-2
!$OMP DO PRIVATE(j, jj)
do i=icspo(ic), icspo(ic+1)-1
do j=lnrowptr(i), lnrowptr(i+1)-1
jj=llnt(j)
z(i)=z(i)-z(jj)*alic(j)/adic(jj)
enddo
enddo
enddo
:

```

図8 マルチカラーオーダーリング法による並列化前進代入計算（有限要素解析ベンチマーク）

表4 有限要素解析ベンチマーク結果

(a) 色数40の場合

CPU数	計算時間 (秒)	反復回数	速度向上
1	823	496	1.0
2	416	496	1.97
4	212	496	3.88
8	115	496	7.14
12	77.6	496	10.6
16	61.1	496	13.5

(b) 色数80の場合

CPU数	計算時間 (秒)	反復回数	速度向上
1	899	509	1.0
2	454	509	1.98
4	228	509	3.95
8	122	509	7.39
12	83.4	509	10.8
16	67.1	509	13.4

(c) 色数120の場合

CPU数	計算時間 (秒)	反復回数	速度向上
1	1190	497	1.0
2	592	497	2.01
4	288	497	4.13
8	149	497	7.96

12	101	497	11.7
16	81.6	497	14.6

参 考 文 献

- [1] C. Balanis, “Advanced Engineering Electromagnetics”, John Willey & Sons, Hoboken, NJ, 1989.
- [2] J. Volakis, A. Cbatterjee, and L. Kempel, “Finite Element Method for Electromagnetics”, IEEE, New York, NY, 1998.
- [3] Y. Saad, “Iterative Methods for Sparse Linear Systems”, Second ed., SIAM, Philadelphia, PA, 2003.
- [4] J. Meijerink and H. A. van der Vorst, “An Iterative Solution Method for Linear Systems of Which the Coefficient Matrix Is a Symmetric M-matrix,” Mathematics of Computation, 31, (1977), pp. 148-162.
- [5] 寒川光, 「RISC 超高速化プログラミング技法」, 共立出版, 1995.
- [6] I. S. Duff and G. A. Meurant, “The Effect of Ordering on Preconditioned Conjugate Gradients”, BIT, 29, (1989), pp. 635-657.
- [7] T. Washio and K. Hayami, “Overlapped Multicolor MILU Preconditioning,” SIAM Journal on Scientific Computing, 16, (1995), pp. 636-650.
- [8] S. Doi and T. Washio, “Ordering Strategies and Related Techniques to Overcome the Trade-off Between Parallelism and Convergence in Incomplete Factorization,” Parallel Computing, 25, (1999), pp. 1995-2014.
- [9] 岩下 武史, 島崎 眞昭; 「同期点の少ない並列化 ICCG 法のためのブロック化赤-黒順序付け」, 情報処理学会論文誌, Vol.43 No. 4, (2002), pp. 893-904.
- [10] S. Doi and A. Lichnewsky, “A Graph-Theory Approach for Analyzing the Effects of Ordering on ILU Preconditioning,” INRIA report 1452, (1991).
- [11] T. Nakata, N. Takahashi, T. Imai, and K. Muramatsu, “Comparison of Various Methods of Analysis and Finite Elements in 3-D Magnetic Field Analysis,” IEEE Trans. Magn., vol. 27, (1991), pp. 4073-4076.
- [12] K. Fujiwara, T. Nakata, and H. Fusayasu, “Acceleration of Convergence Characteristic of the ICCG Method,” IEEE Trans. Magn., vol. 27, (1993), pp. 1958-1961.
- [13] T. Iwashita and M. Shimasaki, “Algebraic Multi-color Ordering for Parallelized ICCG Solver in Finite Element Analyses,” IEEE Trans. Magn., vol. 38, (2002), pp. 429-432.