

# 医療応用を見据えた

## 電磁界-熱伝導連成解析システムの包括的な高速化・高度化

杉本 振一郎

八戸工業大学 工学部

### 1. はじめに

高周波誘電加温による癌の温熱療法の効果を定量的に評価するために情報通信研究機構が公開している数値人体モデル[1]の高周波電磁界-熱伝導連成解析に取り組んでいる。この数値人体モデルは1辺2mmのボクセルから成るため、有限要素法ではボクセル由来の階段形状が電界の反射や回折を起こして精度が低下してしまう。また温熱療法の対象となる癌の直径は数mm程度であるため、2mm幅のボクセルでは解像度が十分ではない。これらの問題の解決にはボクセルを分割した四面体をベースにスムージングする技術[2]の導入や要素の細分割[3]が有効であるが、これらは解析対象の自由度を飛躍的に増やしてしまう。例えば1辺0.25mmのボクセルで人体を分割し、さらにボクセルを四面体に分割した高周波電磁界解析モデルの自由度は約1,300億になり、電界の反射や回折を低減させるためのスムージングを施すと自由度はさらに何割か増えてしまう。

階層型領域分割法(Hierarchical Domain Decomposition Method: HDDM)は領域分割法[4]-[6]を並列計算機環境に効率よく実装するための1手法である。大規模問題を効率よく数値計算することのできる手法としてよく知られており、分散メモリ環境で良好な並列効率を得られることが期待できる[7]。HDDMは大規模な構造解析[8]や熱伝導解析[9]、電磁界解析[10]-[11]に適用され、構造解析では1,000億自由度の解析[12]に成功している。

一方、電磁界解析では電場、磁場に空間的な広がりがあるため解析したい機器だけでなくその周辺の空間も解析対象としなければならず、解析領域が大きくなりやすい。また電磁波を対象とする場合には要素の辺長を電磁波の波長の10分の1以下にする必要があり、大きく広がる空間を大きな要素で埋めることができない。さらに電磁場の様子を詳細に知りたい箇所は機器の中でも特に薄い構造をしているうえ、電磁界解析で用いる反復法の収束性はアスペクト比に非常に敏感であるため扁平な要素でそれらをモデル化することができない。そのため電磁界解析のためのメッシュは大自由度になりやすく、機器の丸ごと解析では簡単に数千万～数億自由度のモデルになってしまう。

また電磁界解析では本来非定常である問題を、商用電源および電磁波が正弦波的に規則正しく変化することを利用して時間微分項 $\partial/\partial t \partial/\partial t$ を $-i\omega$  ( $i$ は虚数単位、 $\omega$ は角周波数)とおくことで複素数での求解を一度だけ行う準定常問題としている。そのため演算カーネルは他の物理現象ではあまり現れない複素数の疎行列ベクトル積となる。さらに、節点に自由度がある通常の節点要素ではなく辺に自由度を持つ辺要素を用いる、行列に不定性があったり悪条件であったりする、など、他の物理現象に比べて大規模問題において収束解を得ることが難しく、計算時間も長くな

りやすい。

このようなことから電磁界解析での並列化研究はなかなか浸透してこなかった。そのため電磁界-熱伝導連成解析などの電磁界解析と連携しなければならない連成解析では、電磁界解析で扱える規模の制限から扱えるモデルの規模がなかなか大きくなかった。

近年、電磁界解析で複素対称行列の求解に広く用いられてきた共役直交共役勾配(Conjugate Orthogonal Conjugate Gradient: COCG)法[13]よりも共役直交共役残差(Conjugate Orthogonal Conjugate Residual: COCR)法[14]が大規模な解析で反復回数および計算時間の面で有利なことがわかってきた[15]。また、最小残差(MINRES)法を複素対称行列向けに拡張した MINRES-like\_CS 法、準最小残差(QMR)法を用いた場合も、COCG 法に比べて計算時間を削減できることがわかってきた[16]。これらを並列電磁界解析モジュール ADVENTURE プロジェクト[17]の ADVENTURE\_Magnetic (AdvMag)に実装して大規模解析に取り組んだ結果、数値人体モデルの高周波電磁界解析について 2016 年に 300 億自由度[18]、2019 年に 1,300 億自由度[19]の解析に成功した。

そこで、電磁界解析に AdvMag を、熱伝導解析には同じく ADVENTURE プロジェクトの並列熱伝導解析ソルバ ADVENTURE\_Thermal (AdvThermal)を用いた電磁界-熱伝導連成解析システムの研究開発を行っている。将来的に電磁界解析で 1 兆自由度、熱伝導解析で 1,000 億自由度の大規模な連成解析を行うことを目指して、AdvMag, AdvThermal それぞれの高速化・高度化に取り組むとともにシステム全体を包括的に高速化・高度化することで、スーパーコンピュータ上で電磁界-熱伝導連成解析を効率的に行えるシステムを研究開発することを目指している。

本稿では、2019 年度の若手・女性利用課題に採択された研究の中で取り組んだ成果も含め、大規模な数値人体モデルの高周波電磁界-熱伝導連成解析に向けて、高周波電磁界解析の結果を用いた熱伝導解析を比較的小規模なメッシュを用いた連成解析を例に、電磁界-熱伝導連成解析システムの研究開発状況について紹介する。

## 2. 高周波電磁界-熱伝導連成解析

温熱療法は通常体温 36~37°C から、癌が死滅する 42~43°C 程度に加温するものであり、温度変化はわずか 5°C 程度である。そのため電磁界解析に関する物性値の温度による変化は無視できる程度である。そこで本研究では電磁界解析の結果を熱伝導解析に用いる片方向連成解析を行う。

また数値人体モデルは CT や MRI から得られた断層画像から生成されるボクセルメッシュが基本となる。しかしこのようなメッシュでは、メッシュ形状に起因する電界の反射や回折による精度低下が生じる。このような精度低下を押さえるために、将来的には四面体ベースのスムージング技術を用いる必要がある。そこで本研究では数値解法には有限要素法をベースにした階層型領域分割法を用いることとする。片方向連成であるため電磁界解析と熱伝導解析のソルバはそれぞれ独立したものでよく、電磁界解析には AdvMag、熱伝導解析には AdvThermal を用いる。

まず AdvMag を用いた高周波電磁界解析では、電場を求め、そこから加温による発熱密度を求める。領域  $\Omega$  を考え、その境界を  $\partial\Omega$ 、境界上の単位法線ベクトルを  $n$  とする。Maxwell 方程式より導かれる電界  $E$  [V/m] を未知関数とするベクトル波動方程式を考える。

$$\operatorname{rot} \left( \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E \right) - (\omega^2 \epsilon - i\omega\sigma)E = i\omega J \quad \text{in } \Omega, \quad (1)$$

$$E \times n = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (2)$$

$$J = \sigma \hat{E}. \quad (3)$$

ここで、 $\mu$ は透磁率[H/m],  $\epsilon$ は誘電率[F/m],  $\sigma$ は導電率[S/m],  $J$ は放射源の電流密度[A/m<sup>2</sup>]である。 $\hat{E}$ は既知の電界であり、式(3)は式(1)へ代入される。境界条件の式(2)を満たすよう式(1)を解くことによって、 $E$ が得られる。

次に式(1)の弱形式を導き、領域 $\Omega$ の有限要素分割を考える。 $E$ をNedelecの四面体一次要素(辺要素)で近似し、 $J$ を通常四面体一次要素で近似する。 $E_h, J_h$ をそれぞれ $E, J$ の有限要素近似とすると次のような有限要素方程式が導かれる。

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{rot} E_h \cdot \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E_h^* dv - \iiint_{\Omega} (\omega^2 \epsilon - i\omega\sigma) E_h \cdot E_h^* dv = \iiint_{\Omega} i\omega J_h \cdot E_h^* dv. \quad (4)$$

ここで、 $E_h^*$ は任意の試験関数である。

式(4)を解いて得られた $E_h$ より、要素ごとの渦電流密度 $J_{e_h}$ [A/m<sup>2</sup>]を求める。

$$J_{e_h} = \sigma E_h. \quad (5)$$

$J_{e_h}$ は複素数であり、実部 $J_r$ 、虚部 $J_i$ を用いて、その振幅 $J_m$ 、および実効値 $J_E$ は次のように求められる。

$$J_m = \sqrt{J_r^2 + J_i^2}. \quad (6)$$

$$J_E = \frac{1}{\sqrt{2}} J_m. \quad (7)$$

よって、加温による要素ごとの発熱密度 $\tilde{f}$ [W/m<sup>2</sup>]は次のように与えられる。

$$\tilde{f} = \frac{J_E^2}{\sigma} = \frac{J_m^2}{2\sigma} = \frac{J_r^2 + J_i^2}{2\sigma}. \quad (8)$$

$\tilde{f}$ を内部発熱の一部として熱伝導解析で用いる。

AdvThermalでは、Poisson方程式を解くことにより温度分布を求める。ヒトは恒温動物であるため筋肉などでの産熱により体温を一定に保っている。そこでまずは成人男性の産熱量37.5 kcal/m<sup>3</sup>・hr [20]を用いて熱伝導解析を行い、深部温度が37°C程度になるよう人体表面の熱伝達係数を同定する。次に同定した熱伝達係数を用いるとともに、内部発熱を産熱と加温による発熱を合わせたものとして熱伝導解析を行えば、高周波電磁界-熱伝導連成解析を行ったことになる。

### 3. 階層型領域分割法

前述の通り階層型領域分割法は領域分割法を並列計算機環境に効率よく実装するための 1 手法である。大規模問題を効率よく数値計算することのできる手法としてよく知られており、分散メモリ環境で良好な並列効率を得られることが期待できる。

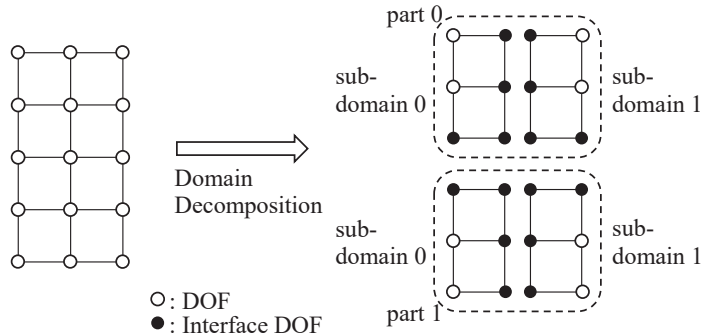


図 1. 階層型の領域分割。

階層型領域分割法では要素の重なりがないように解析領域を part と subdomain からなる階層構造に分割する(図 1)。

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^{N_p-1} \bigcup_{j=0}^{N_s-1} \Omega^{(i,j)}. \quad (9)$$

ここで、 $\Omega^{(i,j)}$  は part  $i$  中の subdomain  $j$  を表す。上付き添え字  $(i,j)$  は領域  $\Omega^{(i,j)}$  に関連する項目であることを表す。 $N_p$ 、 $N_s$  はそれぞれ part 数、part あたりの subdomain 数を表し、 $N_s$  は全 part で等しいとする。図中の黒丸は part、subdomain 間で共有される自由度であり、インターフェース自由度と呼ばれる。

解くべき有限要素方程式を行列形式で表す。

$$Ku = f. \quad (10)$$

式(10)は高周波電磁界解析では式(4)、熱伝導解析では Poisson 方程式となる。式(10)に階層型領域分割法を適用すると、次のように書ける。

$$\begin{bmatrix} K_{II} & K_{IB} \\ K_{IB}^T & K_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_I \\ u_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_I \\ f_B \end{bmatrix}. \quad (11)$$

ここで、 $u_B$  はインターフェース自由度であり、

$$\begin{aligned}
K_{II} &= \begin{bmatrix} K_{II}^{(0,0)} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & K_{II}^{(0,N_s-1)} & & \\ & & & K_{II}^{(1,0)} & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & K_{II}^{(N_p-1,N_s-1)} \end{bmatrix}, \\
K_{IB} &= \begin{bmatrix} K_{IB}^{(0,0)} R_B^{(0,0)} \\ \vdots \\ K_{IB}^{(0,N_s-1)} R_B^{(0,N_s-1)} \\ K_{IB}^{(1,0)} R_B^{(1,0)} \\ \vdots \\ K_{IB}^{(N_p-1,N_s-1)} R_B^{(N_p-1,N_s-1)} \end{bmatrix}, \\
K_{BB} &= \sum_{i=0}^{N_p-1} \sum_{j=0}^{N_s-1} R_B^{(i,j)T} K_{BB}^{(i,j)} R_B^{(i,j)}, \\
f_i &= \sum_{i=0}^{N_p-1} \sum_{j=0}^{N_s-1} R_I^{(i,j)T} f_I^{(i,j)}, \\
f_B &= \sum_{i=0}^{N_p-1} \sum_{j=0}^{N_s-1} R_B^{(i,j)T} f_B^{(i,j)},
\end{aligned}$$

である。下付添え字  $I, B$  はそれぞれ subdomain 内部の自由度、インターフェース自由度に関する項であり、 $R_I^{(i,j)}, R_B^{(i,j)}$  は自由度をそれぞれ subdomain 内部の自由度、またはインターフェース自由度へと制限する 0-1 行列である。式(11)より自由度をインターフェース自由度に静的縮約したインターフェース問題が以下のように得られる。

$$Su_B = g. \quad (12)$$

ただし、

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=0}^{N_p-1} \sum_{j=0}^{N_s-1} R_B^{(i,j)T} S^{(i,j)} R_B^{(i,j)}, \\
S^{(i,j)} &= K_{BB}^{(i,j)} - K_{IB}^{(i,j)T} \left( K_{II}^{(i,j)} \right)^\dagger K_{IB}^{(i,j)}, \\
g &= \sum_{i=0}^{N_p-1} \sum_{j=0}^{N_s-1} R_B^{(i,j)T} \left( f_B^{(i,j)} - K_{IB}^{(i,j)T} \left( K_{II}^{(i,j)} \right)^\dagger f_I^{(i,j)} \right),
\end{aligned}$$

であり、 $S$  はシュア補元行列、 $S^{(i,j)}$  は領域  $\Omega^{(i,j)}$  におけるローカルシュア補元行列である。ここで  $K_{II}^{(i,j)}$  は特異行列であるため、式中の  $\left( K_{II}^{(i,j)} \right)^\dagger$  は一般化逆行列である。階層型領域分割法では並列環境下で式(12)を共役勾配(Conjugate Gradient: CG)法や共役直交共役勾配(Conjugate Orthogonal Conjugate Gradient: COCG)法などの反復法で解き、得られた  $u_B$  を Dirichlet 条件として式(13)を解くことで、全体の解を得る。

$$K_{II}^{(i,j)} u_I^{(i,j)} = f_I^{(i,j)} - K_{IB}^{(i,j)} R_B^{(i,j)} u_B \quad i = 0, \dots, N_p - 1, j = 0, \dots, N_s - 1. \quad (13)$$

階層型領域分割法では、それぞれの MPI プロセスが 1 つの part を担当する。そのため、part 間で共有されるインターフェース自由度についてプロセス間通信でデータを送受信しなければならない。階層型領域分割法では part と MPI プロセスは 1 対 1 で対応するので、簡単のために本稿では 0 番目と 1 番目の MPI プロセスをそれぞれ part 0, part 1 と呼ぶ。

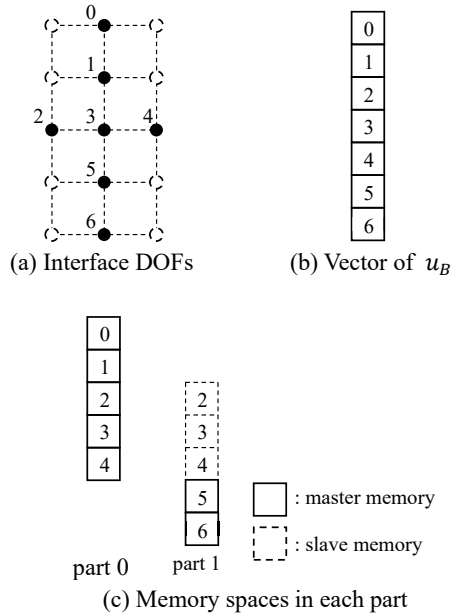


図 2. インターフェース自由度のメモリ空間。

図 1 のケースでは、7 つのインターフェース自由度(図 2 (a))があり、 $u_B$  は 7 つの要素をもつベクトル(図 2 (b))である。しかし解析領域は分割されているため、ベクトルのデータはそれぞれの MPI プロセスに分散して記憶されている。さらに、part 間で共有されているインターフェース自由度はそれぞれの MPI プロセスにメモリが確保されている。ここで、同一のインターフェース自由度について複数のメモリが確保されているため、いずれか一つをマスターメモリとして定める。本稿では、同一のインターフェース自由度に対してメモリが確保されている part の中で、part 番号の最も小さいものが持つメモリをマスターメモリとする。2~4 番のインターフェース自由度は part 0 と part 1 に共有されているので、part 0 のメモリがマスターメモリとなり、part 1 のメモリはスレーブメモリとなる(図 2 (c))。それぞれの part では、マスターメモリ、スレーブメモリを持つインターフェース自由度をそれぞれ基本インターフェース自由度、従属インターフェース自由度と呼ぶ。part 0 ではすべてが基本インターフェース自由度である。一方、part 1 では 2~4 が従属インターフェース自由度、5, 6 が基本インターフェース自由度である。プロセス間通信は、シユア補元行列の行列ベクトル積を行う際に part 間で共有されているインターフェース自由度について行われる。まず従属インターフェース自由度の情報が、その基本インターフェース自由度を持つ part へと送られる。その後、それぞれの part で必要な処理をした結果を基本インターフェース自由度を持つ part からその従属インターフェース自由度を持つ part へ送り、スレーブ

メモリへコピーする。

プロセス間通信を行うため、通信テーブルを作る。まず、インターフェース自由度の part 内でのローカルな通し番号を、従属インターフェース自由度、基本インターフェース自由度の順につける(図 3 左)。このとき、part 0 の 2~4, part 1 の 0~2 について、part 0, part 1 が持つ通信テーブルはそれぞれ図 3 右上と右下のようになる。それぞれの通信テーブルにおいて、「part 0」「part 1」は通信相手である。また、「:」に続く数字は、その通信相手とデータを送受信する必要があるインターフェース自由度の数である。例えば、part 0 が part 0 と通信する必要はないため、「part 0:」の次の数字は「0」である。また、part 1 とは 3 つのインターフェース自由度について通信を行うので、「part 1:」の次の数字は「3」となる。これらの数字が 1 以上である場合には、次の行にデータを送受信するインターフェース自由度のローカルな通し番号を必要なだけ並べる。ここで、part 0 の 0 と 1 のように、同じ part 内の subdomain 間でしか共有していないインターフェース自由度は通信テーブルには含まれない。プロセス間通信はこれらの通信テーブルに基づいて行われる。

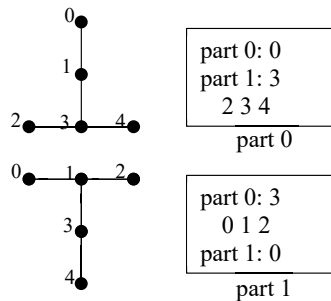


図 3. それぞれの part でのインターフェース自由度の通し番号と通信テーブル。

#### 4. 数値解析例

約70万自由度の簡易人体モデル(図 4)を作成し、連成解析を試行した。このモデルでは胸部の治療を想定して、胸部の骨、肺、心臓を再現している。

まず基礎代謝(筋肉などによる産熱)のみを考慮した熱伝導解析を行い、深部温度が37°C程度になるように人体表面の熱伝達係数を同定した。しかる後に上半身の上に置いたアンテナから電磁波を照射することを想定した連成解析を行い、体内の温度が加温によって上昇することを確認した(図 5)。

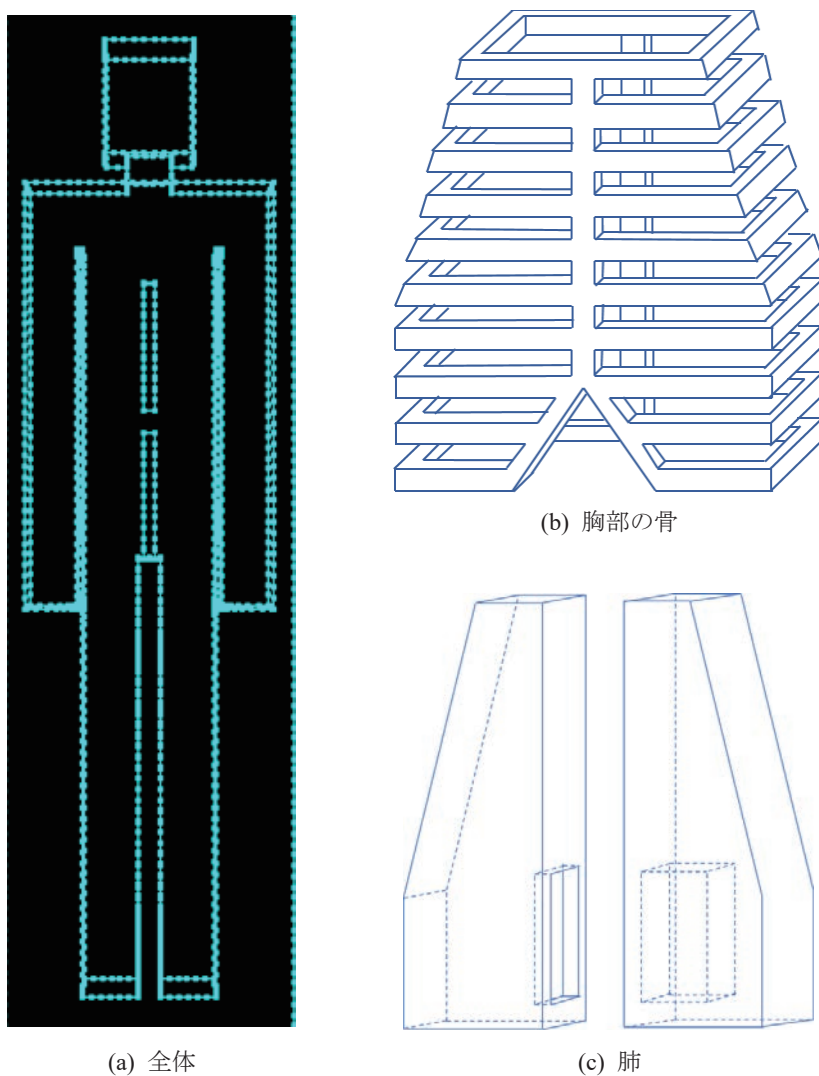


図 4. 簡易数値人体モデル。



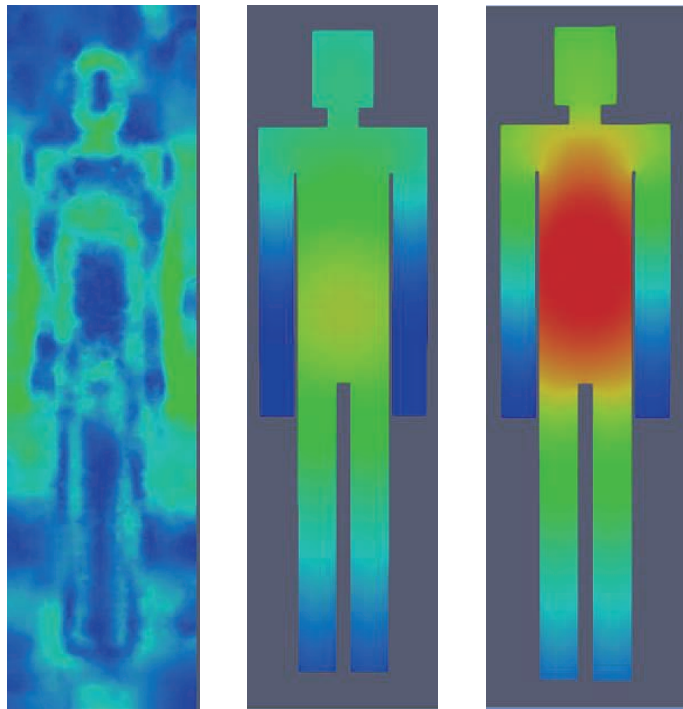


図 5. 数値解析結果。

左：磁場，中：温度分布(産熱のみ)，右：温度分布(加温あり，連成解析)

## 5. おわりに

本稿では研究開発中の高周波電磁界-熱伝導連成解析システムを用いて、約 70 万自由度の簡易人体モデルにより連成解析を試行した。今後は CT で得られたデータから生成された数値人体モデルを用いた連成解析を行い、温熱療法の効果を定量的に評価するためのシステムの研究開発をさらに進めていく。

## 謝 辞

本研究の一部はは東京大学情報基盤センター若手・女性利用者推薦，JSPS 科研費 17H02829，17H03256，青森県工業技術教育振興会，および高橋産業経済研究財団の助成を受けて実施された。

ここに記し、感謝の意を表す。

## 参 考 文 献

- [1] 情報通信研究機構 電磁環境研究室 HP: <http://emc.nict.go.jp/index.html>
- [2] A. Takei, K. Murotani, S. Sugimoto, M. Ogino and H. Kawai: "High-Accuracy Electromagnetic Field Simulation using Numerical Human Body Models", IEEE Transaction on Magnetics, Vol.52, Issue 3, 7402704, 4p (2016).
- [3] K. Murotani, S. Sugimoto, H. Kawai and S. Yoshimura: "Hierarchical Domain Decomposition with Parallel Mesh Refinement for Billions-of-DOF Scale Finite Element Analyses", International Journal

of Computational Methods, Vol.11, Issue 4, p.1350061-1 - 1350061-30 (2014).

- [4] R. Glowinski, Q.V. Dinh and J. Periaux: "Domain decomposition methods for nonlinear problems in fluid dynamics", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.40, Issue 1, pp.27-109 (1983).
- [5] A. Quarteroni and A. Valli: "Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations", Clarendon Press, Oxford (1999).
- [6] A. Toselli and O. Widlund: "Domain Decomposition Methods: Algorithms and Theory (Springer Series in Computational Mechanics)", Springer (2004).
- [7] R. Shioya and G. Yagawa: "Iterative domain decomposition FEM with preconditioning technique for large scale" problem, *ECM'99 Progress in Experimental and Computational Mechanics in Engineering and Material Behaviour*, pp.255-260 (1999).
- [8] S. Yoshimura, R. Shioya, H. Noguchi and T. Miyamura: "Advanced general-purpose computational mechanics system for large-scale analysis and design", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol.149, Issue 1, pp.279-296 (2002).
- [9] A.M.M. Mukaddes, M. Ogino, M. H. Kanayama and R. Shioya: "A scalable balancing domain decomposition based preconditioner for large scale heat transfer problems", *JSME International Journal Series B Fluids and Thermal Engineering*, Vol.49, No.2, pp.533-540 (2006).
- [10] H. Kanayama and S. Sugimoto: "Effectiveness of A- $\square$  method in a parallel computing with an iterative domain decomposition method", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol.42, Issue 4, pp.539-542 (2006).
- [11] A. Takei, S. Yoshimura and H. Kanayama: "Large-scale parallel finite element analyses of high frequency electromagnetic field in commuter trains", *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, Vol.31, No.1, pp.13-24 (2008).
- [12] M. Ogino and R. Shioya: "Scalable non-overlapping domain decomposition method for finite element simulations with 100 billion degrees of freedom model", *Proceedings of the 1st International Conference on Computational Engineering and Science for Safety and Environmental problems*, pp.96-99 (2014).
- [13] H.A. Vorst and J.B.M. Melissen: "A Petrov-Galerkin type method for solving  $Ax=b$  and where A is symmetric complex", *IEEE Transaction on Magnetics*, Vol.26, No.2, pp.706-708 (1990).
- [14] T. Sogabe and S.L. Zhang: "A COCR method for solving complex symmetric linear systems", *Journal of Computational and Applied Mechematics*, Vol.199, No.2, pp.297-303 (2007).
- [15] M. Ogino, A. Takei, H. Notsu, S. Sugimoto and S. Yoshimura: "Finite element analysis of high frequency electromagnetic fields using a domain decomposition method based on the COCR method", *Theoretical and Applied Mechanics Japan*, Vol.61, pp.173-181 (2013).
- [16] M. Ogino, A. Takei, S. Sugimoto and S. Yoshimura: "A numerical study of iterative substructuring method for finite element analysis of high frequency electromagnetic fields", *Computational & Mathematics with Applications*, Vol.72, Issue 8, pp.2020-2027 (2016).
- [17] ADVENTURE プロジェクト HP: <http://adventure.sys.t.u-tokyo.ac.jp/jp/>
- [18] S. Sugimoto, A. Takei and M. Ogino: "Finite element analysis with tens of billions of degrees of freedom in a high-frequency electromagnetic field", *Mechanical Engineering Letters*, Vo.3 (2017).

- [19] S. Sugimoto, A. Takei and M. Ogino, "High-Frequency Electromagnetic Field Analysis with 130 Billion of Degrees of Freedom", The 38th JSST Annual Conference, International Conference on Simulation Technology, pp.290-295 (2019).
- [20] 中山昭雄, "温熱生理学", 理工学社, 1981.