

# 内側円筒が回転する同心二円筒環状流路内の熱伝達と 摩擦抵抗に Taylor 渦の移流が与える影響の LES 解析

大竹啓太

東京農工大学大学院機械システム工学専攻

## 1. はじめに

電気モータやガスタービンなどの回転機械において、エネルギー効率向上のための効果的な冷却および摩擦抵抗低減が求められている。したがって、回転機械内の流れにおける熱伝達および摩擦抵抗に対する理解が重要となる。本課題では、熱伝達の指標としてヌセルト数（流れによる熱伝達と流体の熱伝導の比を表す無次元数）を、摩擦抵抗の指標としてトルク係数（回転に起因する摩擦抵抗）と軸方向摩擦係数（軸方向の流れ（貫流）がある場合の軸方向の摩擦抵抗）を用いて評価する。回転機械内の流れは、内壁が回転する同心二円筒間環状流路内の流れに単純化することができる。そのため、以下では内壁が回転する同心二円筒間環状流路について述べる。

内壁が回転する同心二円筒間環状流路内の流れにおいて、テイラー数  $Ta$ （内壁の回転数を表す無次元数）がある閾値を越えると、内壁の回転による遠心力が原因となり、周方向に回転軸を持つリング状の渦構造（Taylor 渦<sup>[1]</sup>）が現れ、この流れを Taylor-Couette 流れと呼ぶ。更に内側円筒の回転数が増加すると定常状態から非定常状態に遷移し、波状の渦である wavy vortex を経て乱流へ遷移する<sup>[2]</sup>。

Taylor-Couette 流れに軸方向の流れ（貫流）が重畳された流れは、Taylor-Couette-Poiseuille 流れと呼ばれ、このような流れはガスタービン、電気モータなどで見られる。Taylor-Couette-Poiseuille 流れでは貫流が流れを安定化するため、Taylor 渦が形成される閾値は Taylor-Couette 流れよりも上昇する上、Taylor 渦が貫流によって軸方向に移動することが報告されている<sup>[3]</sup>。したがって、Taylor-Couette-Poiseuille 流れでの流れ場は Taylor-Couette 流れの流れ場と異なる。

そこで、本研究室の先行研究である大澤<sup>[5][6]</sup>、藤本<sup>[7]</sup>は、壁面摩擦抵抗を層流寄与項と乱流寄与項に分解する FIK 恒等式<sup>[4]</sup>を参考に、Taylor-Couette 流れ、Taylor-Couette-Poiseuille 流れのヌセルト数、トルク係数と軸方向摩擦係数に対し、移流、乱流輸送、分子拡散の3項の貢献度を求める恒等式を導出した。このように、ヌセルト数、トルク係数、軸方向摩擦係数を移流、乱流輸送、分子拡散の3つの貢献度を定量的に評価するのは初の試みであった。その結果、Taylor-Couette 流れにおけるヌセルト数、トルク係数に対しては共に移流項が支配的であることがわかった<sup>[5]</sup>。

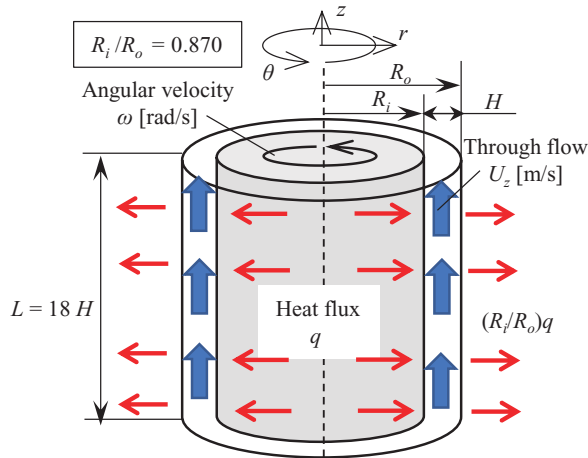
しかし、この方法では、Taylor-Couette 流れでは Taylor 渦による移流の影響を評価できていたが、Taylor-Couette-Poiseuille 流れでは Taylor 渦が貫流によって軸方向に押し流されるため、静止座標系の下で時間平均および周・軸方向平均を行うと移流項の影響がほぼゼロとなり評価できていなかったという問題があった。そのため、本研究では Taylor-Couette-Poiseuille 流れにおいて Taylor 渦を追跡し、Taylor 渦による移流の影響を評価することを主眼とした。

Taylor 渦を追跡するためには、Taylor 渦とともに移動する座標系の下で平均操作を行う必要がある。そこで Taylor 渦とともに移動する座標系の提案を試みた。しかし、軸方向平均速度で移動する座標系、貫流平均流速で移動する座標系で観測する様に処理を施したものの、Taylor 渦はそれぞれ揺動しながら流れるためいずれも Taylor 渦の移動を正しく表現することはできなかった。したがって、本研究の主眼とした Taylor 渦の追跡は叶わなかった。そのため、以下は従来と同じ方法（静止座標系の下で時間平均・周および軸方向平均による統計量の算出）を用い、先行研究<sup>[5][6][7]</sup>よりも高乱流域において行った熱伝達・摩擦抵抗の評価について記す。

## 2. 数値解析手法

図 1 に、計算領域の模式図を示す。内側円筒と外側円筒の半径比は  $R_i/R_o=0.87$ 、流路高さは  $H$ [m] である。軸方向長さは、Taylor-Couette-Poiseuille 流れを計算する際は  $18H$ [m]、Taylor-Couette 流れの場合には  $9H$ [m] とした。ここで  $R$ [m] は円筒半径、添え字  $i, o$  はそれぞれ内側および外側円筒を表す。内側円筒は角速度  $\omega$  [rad/s] で回転し、内側円筒・外側円筒に滑りなし条件、周および軸方向は周期境界条件を課した。また、等熱流束で内側円筒を加熱 ( $q$  [W/m<sup>2</sup>])、外側円筒を冷却 ( $(R_i/R_o)q$  [W/m<sup>2</sup>]) した。計算領域の周方向サイズは 90 度とし、計算格子は構造格子を用いた。格子数は  $Ta = 4000$ 、 $Re = 4000$  の場合で半径 ( $r$ )、周 ( $\theta$ )、軸 ( $z$ ) 方向にそれぞれ 104, 288, 400 であり、内側円筒における周・軸方向速度の半径方向の勾配を用いて定義した摩擦速度で規格化した格子解像度は  $\Delta r^+ = 0.30 \sim 7.6$ 、 $(r\Delta\theta)^+ = 8.8 \sim 10.0$ 、 $\Delta z^+ = 10.7$  である。計算条件として、テイラー数  $Ta (=R_i\omega H/\nu)$  および貫流レイノルズ数  $Re (=U_z(2H)/\nu)$  を  $(Ta, Re) = (4000, 0)$ ,  $(4000, 1000)$ ,  $(4000, 4000)$ ,  $(4000, 8000)$ ,  $(4000, 12000)$ ,  $(8000, 0)$ ,  $(8000, 1000)$ ,  $(8000, 4000)$ ,  $(12000, 0)$  とした。ここで  $\nu$  [m<sup>2</sup>/s] は動粘度、 $U_z$  [m/s] は貫流平均流速を表す。

支配方程式は、非圧縮流れの連続の式、Navier-Stokes 方程式、エネルギー方程式である。周期境界条件下で軸方向に貫流を重畳するため、Navier-Stokes 方程式に平均圧力勾配を付加した。式の離散化には有限体積法を用い、OpenFOAM-6 を用いて解析を行った。時間の離散化は 2 次精度後退差分を、空間の離散化には 2 次精度中心差分を用いた。LES の Sub-Grid Scale (SGS) モデルとして、Smagorinsky 定数を流跡線に沿って平均化する Lagrangian dynamic Smagorinsky モデル<sup>[8]</sup>を用いた。



第1図: Taylor-Couette-Poiseuille 流れの場合の計算領域。

Taylor-Couette 流れの場合には、軸方向長さは  $9H$ [m] とした。

### 3. 評価方法

本研究では、先行研究<sup>[5][6][7]</sup>が提案した、内側円筒が回転する同心二円筒環状流路内のヌセルト数  $Nu$ 、トルク係数  $C_M$ 、軸方向摩擦係数  $C_f$  を移流、乱流輸送および分子拡散の貢献度に分解する式(1)、(2)、(3)を用い、 $Nu$ 、 $C_M$ 、 $C_f$  に対する各項の貢献度を評価した。

$$Nu = \frac{2}{\alpha \Delta \bar{T}} \int_{R_i}^{R_o} \left( \frac{r}{R_i} \langle \bar{u}_r \bar{T} \rangle + \frac{r}{R_i} \langle \bar{u}_r \bar{T}' \rangle - \frac{r}{R_i} \alpha \left\langle \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right\rangle \right) dr \quad (1)$$

$$C_M = \frac{1}{(R_i \omega)^2 R_i^2 H} \int_{R_i}^{R_o} \left( r^2 \langle \bar{u}_r \bar{u}_\theta \rangle + r^2 \langle \bar{u}_r \bar{u}_\theta' \rangle - r^3 v \left\langle \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\bar{u}_\theta}{r} \right) \right\rangle \right) dr \quad (2)$$

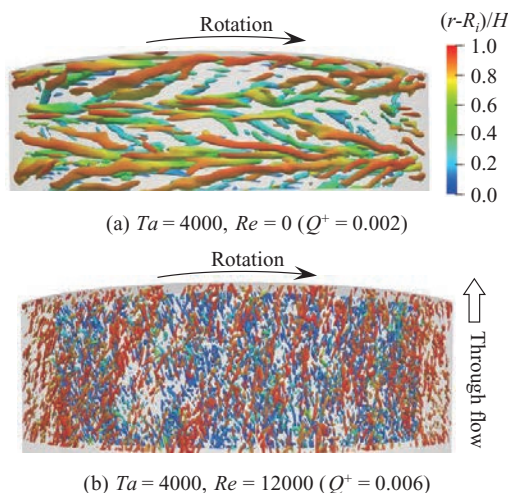
$$C_f = \frac{8H}{U_z^2 (R_o^2 - R_i^2)} \left\{ \frac{1}{R^2 - R_i^2} \int_{R_i}^R \left( r^2 \langle -(\bar{u}_r \bar{u}_z) \rangle + r^2 \langle -(\bar{u}_r \bar{u}_z') \rangle + r^2 v \left\langle \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial r} \right\rangle \right) dr \right. \\ \left. + \frac{1}{R_o^2 - R^2} \int_R^{R_o} \left( r^2 \langle \bar{u}_r \bar{u}_z \rangle + r^2 \langle \bar{u}_r \bar{u}_z' \rangle - r^2 v \left\langle \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial r} \right\rangle \right) dr \right\} \quad (3)$$

式(1)、(2)、(3)は流れの完全発達を仮定し、円筒座標系におけるエネルギー方程式、周・軸方向の Navier-Stokes 方程式を半径方向に積分することで導出した。ここで  $\alpha$  [m<sup>2</sup>/s] は温度伝導率、 $\langle \bar{\cdot} \rangle$  は時間平均成分、 $\langle \cdot \rangle$  は変動成分、 $\langle ( \cdot ) \rangle$  は周・軸両方向平均を表す。また、 $\Delta \bar{T} (= \langle \bar{T} \rangle_{r=R_i} - \langle \bar{T} \rangle_{r=R_o})$  は両円筒間の時間平均温度の差である。式(3)における  $R$  [m] は、全応力(レイノルズ応力と粘性応力の和)がゼロの位置と定義した。式(1)、(2)、(3)それぞれの  $r=R_i$  から  $r=R$  までの積分値を流路内側における貢献度、 $r=R$  から  $r=R_o$  までの積分値を流路外側における貢献度とした。

## 4. 解析結果および考察

### 4.1 渦の可視化

図 2 に内層スケール( )<sup>+</sup>で規格化した速度勾配テンソルの第 2 不変量  $Q^+$  の等値面を示す。図 2(a) の  $Ta = 4000$ ,  $Re = 0$  では、渦管が周方向に並んでおり、周方向の剪断応力が支配的である。一方、図 2(b) の  $Ta = 4000$ ,  $Re = 12000$  では、渦管は軸方向に傾いて並んでいる。したがって、 $Re$  の増加によって、貫流が流れに及ぼす影響が増すことがわかる。



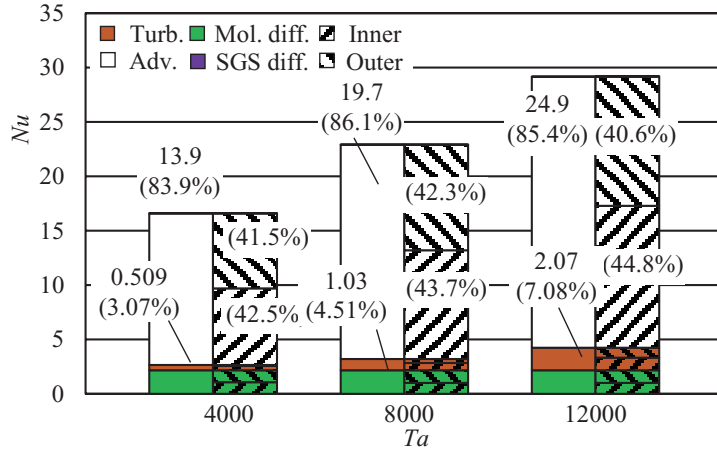
第 2 図: 速度勾配テンソルの第 2 不変量の等値面。

カラーコンターは半径方向座標を表す。

### 4.2 熱伝達 (ヌセルト数) の評価結果

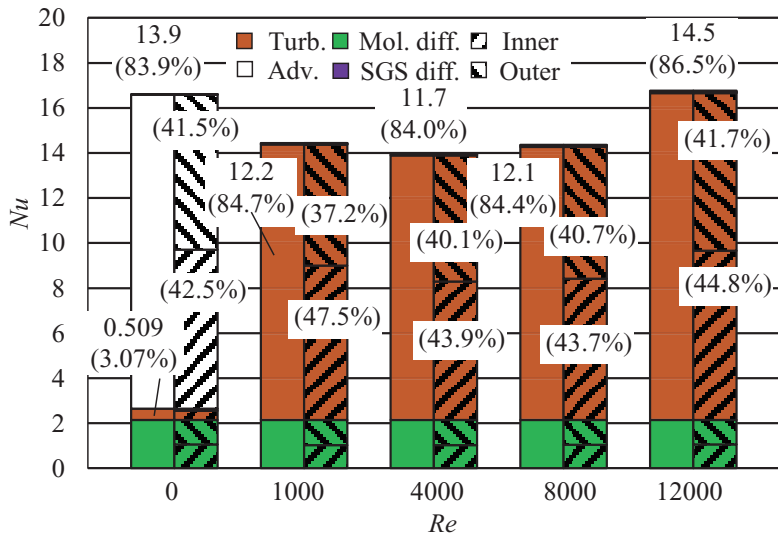
図 3 に、式(1)で評価した、 $Re = 0$  におけるヌセルト数  $Nu$  への移流、乱流輸送および分子拡散の貢献度を示す。(同一の  $Re$  において) 内壁回転が熱伝達に及ぼす影響を評価する。 $Ta$  の増加とともに移流項および乱流輸送項が増加し、結果として  $Nu$  も増加した。

図 4 に、式(1)で評価した、 $Ta = 4000$  におけるヌセルト数  $Nu$  への移流、乱流輸送、分子拡散の貢献度を示す。この図より (同一の  $Ta$  において) 貫流が熱伝達に及ぼす影響を評価する。貫流がない場合 ( $Re = 0$ ) では移流項の貢献度が支配的である。一方、貫流がある場合では移流項の影響が消滅し、乱流輸送項が支配的となった。この原因は、移流項は Taylor 渦に起因する  $r-z$  面内の循環流れによるが、貫流が重畳されると Taylor 渦が軸方向に押し流され、時間平均と周・軸方向空間平均を行うと Taylor 渦の影響が消えるためである。また、乱流輸送項の流路内側・外側での貢献度に注目すると、 $Re = 1000$  では流路内側が外側よりも 10.2 ポイント大きく、 $Re = 12000$  では流路内側が外側よりも 3.4 ポイント大きくなり、高  $Re$  では乱流輸送項の流路内側と外側の貢献度の差が小さくなる。これは、 $Re$  が低い  $Re = 1000$  では内壁回転の影響が大きいため、内壁回転によって流路内側での流れが不安定となり、流路外側と比較して流路内側の貢献度が大きくなる。一方、 $Re$  が高い条件 ( $Re = 12000$ ) では、貫流が流れ場に与える影響が増加し、内壁回転が流れ場に及ぼす影響が相対的に小さくなるためである。



第3図：貫流がない場合における， $Ta = 4000, 8000, 12000$  におけるヌセルト数に対する各項の貢献度。

それぞれの棒グラフの左側は流路全体における値，右側の右上がりの斜線部分は流路内側における値，右側の右下がりの斜線部分は流路外側における値を表す。棒グラフの緑の部分は分子拡散項の貢献度を，茶色の部分は乱流輸送の貢献度を，白の部分は移流項の貢献度を表す。



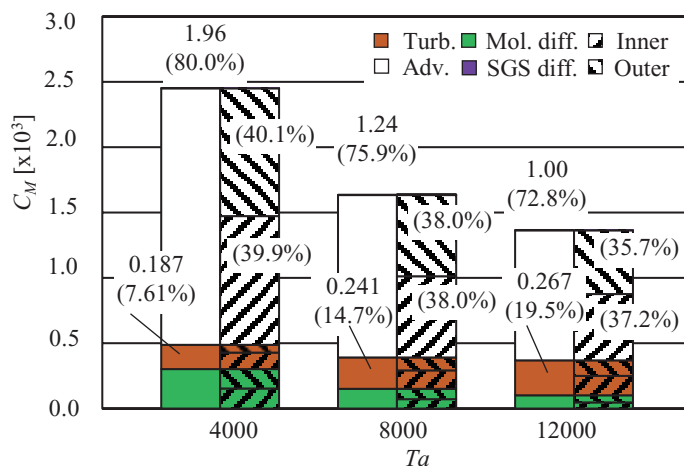
第4図： $Ta = 4000$  における， $Re = 0, 1000, 4000, 8000, 12000$  のヌセルト数に対する各項の貢献度。

それぞれの棒グラフの左側は流路全体における値，右側の右上がりの斜線部分は流路内側における値，右側の右下がりの斜線部分は流路外側における値を表す。棒グラフの緑の部分は分子拡散項の貢献度を，茶色の部分は乱流輸送の貢献度を，白の部分は移流項の貢献度を表す。

### 4.3. 周方向摩擦抵抗（トルク係数）の評価結果

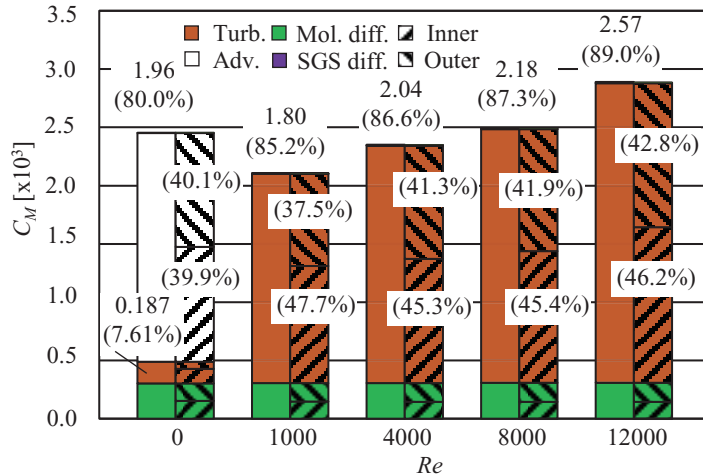
図5に、式(2)で評価した、 $Re = 0$ におけるトルク係数  $C_M$ への移流，乱流輸送および分子拡散の貢献度を示す。テイラー数  $Ta$ の増加に伴い，乱流輸送項の貢献度のみ増加するが，移流項，分子拡散項の貢献度は減少した。各ケースで移流項が70%以上を占めているため，移流項の増減の影響を大きく受け，結果として  $Ta$ の増加に伴い  $C_M$ は減少した。

図6に、式(2)で評価した， $Ta = 4000$ におけるトルク係数  $C_M$ への移流，乱流輸送および分子拡散の貢献度を示す。ヌセルト数と同様に， $Re = 0$ では移流項が支配的だが， $Re = 1000$ 以降では乱流輸送項の貢献度が支配的となり，貢献度は  $Re$ の増加に伴い更に増加した。



第5図：貫流がない場合における， $Ta = 4000, 8000, 12000$ におけるトルク係数に対する各項の貢献度。

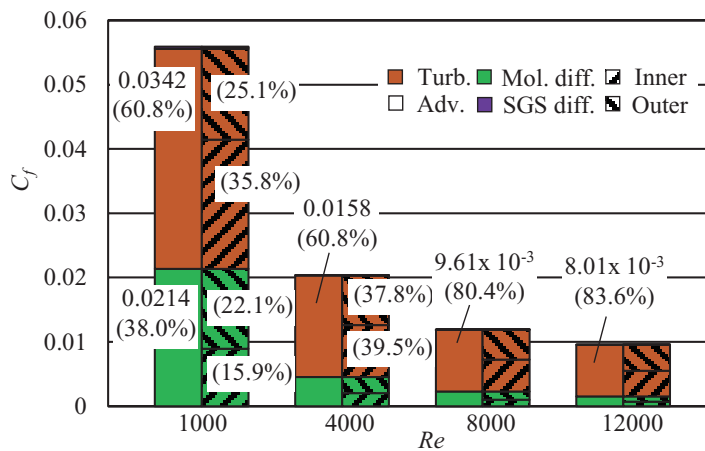
それぞれの棒グラフの左側は流路全体における値，右側の右上がりの斜線部分は流路内側における値，右側の右下がりの斜線部分は流路外側における値を表す。棒グラフの緑の部分は分子拡散項の貢献度を，茶色の部分は乱流輸送の貢献度を，白の部分は移流項の貢献度を表す。



第6図:  $Ta = 4000$  における,  $Re = 0, 1000, 4000, 8000, 12000$  のトルク係数への各項の貢献度。それぞれの棒グラフの左側は流路全体における値, 右側の右上がりの斜線部分は流路内側における値, 右側の右下がりの斜線部分は流路外側における値を表す。棒グラフの緑の部分は分子拡散項の貢献度を, 茶色の部分は乱流輸送の貢献度を, 白の部分は移流項の貢献度を表す。

#### 4.4. 軸方向摩擦抵抗 (軸方向摩擦係数) の係数

図7に, 式(3)で評価した,  $Ta = 4000$  における,  $Re = 1000$  から  $12000$  の軸方向摩擦係数  $C_f$  への移流, 乱流輸送および分子拡散の貢献度を示す。図11より,  $Re$  の増加に伴い,  $C_f$  は減少していく。各項の内訳に着目すると,  $Re$  の増加に伴い乱流輸送項の貢献度の割合が増加し,  $Re = 12000$  では  $83.6\%$  となり, 乱流輸送項の貢献度が支配的となった。



第7図:  $Ta = 4000$  における,  $Re = 1000, 4000, 8000, 12000$  の軸方向摩擦係数への各項の貢献度。それぞれの棒グラフの左側は流路全体の値, 右側の右上がりの斜線部分は流路内側の値, 右側の右下がりの斜線部分は流路外側の値を表す。緑の部分は分子拡散項の貢献度を, 茶色の部分は乱流輸送の貢献度を表す。

## 5. 結論

本研究では、Taylor-Couette 流れおよび Taylor-Couette-Poiseuille 流れに対し流れ場および温度場の LES 解析を行い、内壁回転および貫流が熱伝達および摩擦抵抗に及ぼす影響を評価し、以下の結論を得た。

1. 本課題の主眼であった「Taylor-Couette-Poiseuille 流れにおいて、Taylor 渦の移流が熱伝達・摩擦抵抗に与える影響」を評価するためには、Taylor 渦とともに移動する座標系から時間平均・周および軸方向平均を行う必要がある。しかし、Taylor 渦の移動を正しく表現することができなかった。
2. 以下は従来の方法（静止座標系の下で時間平均・周および軸方向平均による統計量の算出）について記す。ヌセルト数  $Nu$  について、 $Re = 0$  において、 $Ta$  の増加に伴い  $Nu$  は増加し、 $Ta = 12000$  では、 $Ta = 4000$  と比較して 1.76 倍大きい。一方、 $Ta = 4000$  において、 $Re$  の増加に伴い  $Nu$  は  $Re = 0$  から 4000 まで減少し、 $Re = 12000$  まで増加した。 $Re = 0$  では移流項が、 $Re = 1000$  以降では乱流輸送項が支配的であった。トルク係数  $C_M$  について、 $Re = 0$  において、 $Ta$  の増加に伴い  $C_M$  は減少し、 $Ta = 12000$  では、 $Ta = 4000$  と比較して 0.56 倍小さい。一方、 $Ta = 4000$  において、 $Re$  の増加に伴い、 $C_M$  は  $Re = 0$  から 1000 まで減少し、それ以降  $Re = 12000$  まで増加した。 $Re = 0$  では移流項が、 $Re = 1000$  以降では乱流輸送項が支配的となった。軸方向摩擦係数  $C_f$  について、 $Ta = 4000, 8000$  において、 $Re$  の増加に伴い、 $C_f$  は減少した。

## 参 考 文 献

- [1] Taylor, G. I., *Philosophical Transactions A, Royal Society of London*, Vol. 223, (1923), pp. 289-343.
- [2] Coles, D., *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 21, No.3(1965), pp. 385-425.
- [3] Lueptow, R. M., Docter, A., Min, K., *Physics of Fluids A*, Vol. 4, No. 11(1992), pp. 2446-2455.
- [4] Fukagata, K., Iwamoto, K., Kasagi, N., *Physics of Fluids*, Vol.14, No.11(2002), pp. L73-L76.
- [5] Ohsawa, A., Murata, A., and Iwamoto, K., *J. of Thermal Science and Technology*, Vol.11, No.2(2016), DOI: 10.1299/jtst.2016jtst0027.
- [6] Ohsawa, A., Murata, A., Iwamoto, K., *Journal of Thermal Science and Technology*, Vol.11, No.2(2016), DOI: 10.1299/jtst.2016jtst0031.
- [7] 藤本, 東京農工大学大学院修士論文, (2018)
- [8] Meneveau, C., et al., *J. Fluid Mech.*, Vol. 319, (1996), pp.353-385.