

企業間取引の大規模ネットワーク構造からみた企業の特徴

大西立顕

一般財団法人 キヤノングローバル戦略研究所，東京大学大学院法学政治学研究科

1 超並列計算による大規模経済データの分析

近年の情報技術の進展により様々な分野で電子化が進み，詳細で膨大な情報が日々蓄積されるようになってきた。その結果，超大量多様な経済データが利用可能になり，これらの分析の学術的・社会的ニーズが高まっている。伝統的な経済学は，このような大規模な実証データが存在しない時代に発展してきた。そのため，まず最初になんらかの仮定を行ない，その仮定を出発点にして理論を構築しているが，その仮定・理論の正当性は十分に検証されていない。しかし，今では現実の大規模データを用いることで，前提となる仮定の妥当性や理論の正当性を実証的に検証しながら，理論構築できる状況になってきている。物理学の概念や手法を用いて，このような大規模な実証データを科学的に分析するのが経済物理学である。

経済活動は売り手・買い手の間のモノ・金の交換(相互作用)と捉えられる。相互作用があっても個々がランダムにゆらげば，全体のゆらぎは正規分布に従う。しかし，ほとんどの経済現象では常に競争が働くため相互作用が強く，全体として大きなゆらぎを伴うためベキ分布に従う。平均値±標準偏差で現象を捉えられる正規分布と異なり，ベキ分布は桁違いの値を取りうるので，平均・分散は意味をなさず，正規分布を基本にしている多くの統計手法は，厳密には適用できず有効ではない。さらに，経済現象では要素(経済主体)の異質性・多様性が強く，物質科学の現象と異なり作用・反作用の法則が成立しないため，多体の方向つき相互作用(複雑ネットワーク)を考える必要がある。したがって，統計的有意な関係性や法則性を見つけ出すには，ノンパラメトリックな統計手法や現実の分布を利用したモンテカルロ法(適切なランダムシャッフルデータとの比較)による分析が必要になる。これらは，計算量が膨大かつ並列計算に適した計算のため，スーパーコンピュータによる超並列計算が必要かつ有効である。

企業間のお金と製品・サービスの流れは経済活動の根幹に関わる現象である。本研究では，有向リンク解析(ページランクとオーソリティ・ハブ度)とネットワークモチーフの二つの手法を用いて，企業間取引の大規模な有向ネットワークを分析する。

2 企業間取引ネットワーク

2.1 解析したデータ

東京商工リサーチ社が提供する2005年時点での日本企業約100万社についての企業属性(売上高，申告所得，利益金，従業員数，業種，地域など)¹と主要取引先データ(仕入先，販売先)を分析した。取引先データから，企業をノード，取引関係を有向リンクとして，各企業がどの企業と取引しているかに関する大規模な有向ネットワーク(企業間取引ネットワーク)²を構築し，分析した[1, 2]。有向リンクの方向は，お金の流れの向き(買い手→売り手)にとる。つまり，

¹売上高，申告所得，利益金については，2003年と2004年時点のデータも入っている。

²ただし，個人消費者，政府，海外の会社との取引関係はデータに含まれていないため，本研究は国内の企業間取引に限定した分析になる。

反対向きは製品・サービスの流れになる。ネットワークのサイズは 961,318 ノード, 3,667,521 リンクになる。

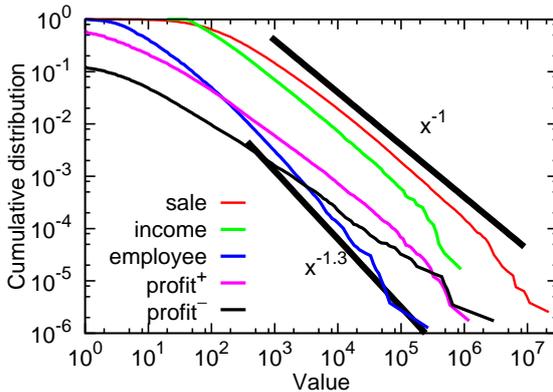
2.2 企業の規模・成長率の統計性

企業規模 x の分布は, $x > x_{min}$ でベキ分布

$$P(> x) \propto x^{-\alpha}$$

に従う (第 1 図)。最尤法と Kolmogorov-Smirnov 検定から算出した指数は $\alpha \sim 1$ である (第 1 表)。企業の成長率 $r = x(t+1)/x(t)$ (企業規模の前年比) は, ガウス分布よりずっと裾野が広く, ベキ分布に近い大きなゆらぎを示す (第 2 図)。

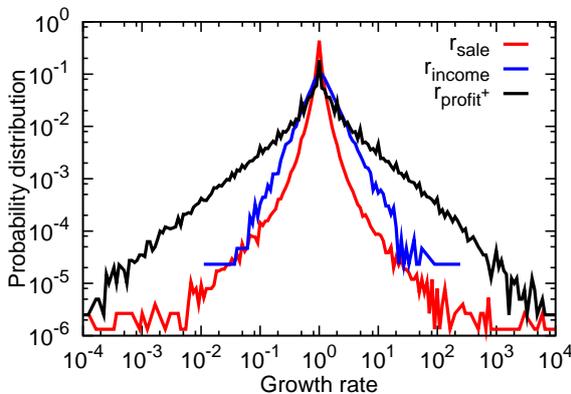
つまり, 企業のダイナミクスは大きなゆらぎを伴う複雑な系であり, 現象を無相関な確率変数の単純な和として理解することはできない。そのため, 現象の解明には, 単一の企業そのものだけでなく, 企業間の相互作用を理解することが重要になる。



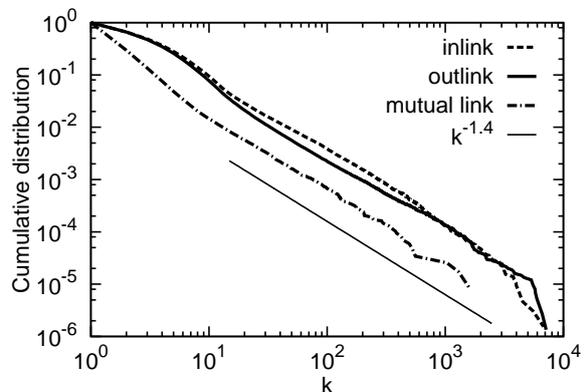
第 1 図 : 企業規模の累積確率分布。売上高 (sale), 申告所得 (income), 正の利益金 (profit⁺), 負の利益金 (profit⁻) の単位は 100 万円。従業員数 (employee) の単位は人。

第 1 表 : 最尤法と Kolmogorov-Smirnov 検定から算出 [3] した指数 α と下限 x_{min} 。

	x_{min}	α
売上高	13800	1.025 ± 0.010
申告所得	424	0.967 ± 0.010
従業員数	344	1.298 ± 0.014
入リンク数	87	1.371 ± 0.025
出リンク数	85	1.249 ± 0.028
相互リンク数	34	1.350 ± 0.076



第 2 図 : 企業成長率の確率密度分布。 r_{sale} , r_{income} , $r_{profit+}$ はそれぞれ売上高, 申告所得, 正の利益金の前年比。



第 3 図 : リンク数の累積確率分布。

2.3 ネットワークの統計性

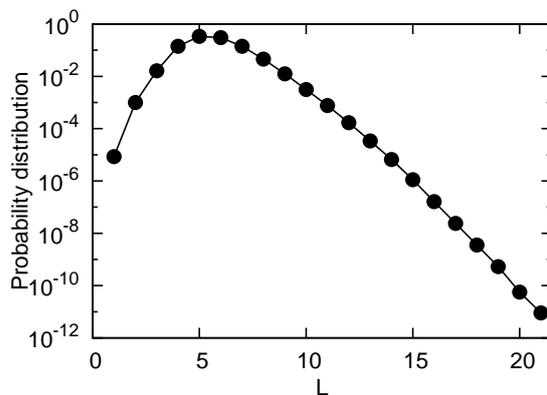
有向ネットワークでは、リンクは入リンク (○←), 出リンク (○→), 相互リンク (○↔) の三種類に分けられる。入リンク数, 出リンク数, 相互リンク数はどれもベキ分布し [1, 2, 4, 5, 6], このネットワークはスケールフリーネットワークになっている (第3図)。最尤法と Kolmogorov-Smirnov 検定から算出した指数は, 入リンクと相互リンクは $\alpha \sim 1.4$, 出リンクは $\alpha \sim 1.2$ である (第1表)。

ノード間の距離 (任意の二つのノードをつなぐのに必要な最小リンク数) は指数分布し, 平均距離は 5.62, 最大距離は 21 リンクである (第4図)。

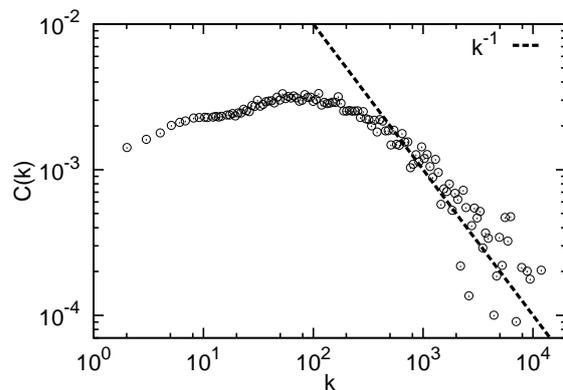
いま, リンクの方角を無視して無向ネットワークとして考えたとき, ノード i のクラスター係数は, そのノードを含む三角形の個数 ÷ 可能な三角形の個数, つまり,

$$C_i = \frac{2 t_i}{k_i(k_i - 1)}$$

で与えられる。ただし, t_i はノード i を含む三角形の個数, k_i はノード i のリンク数である。同じリンク数をもつノードについての C_i の平均値 $C(k)$ は, $k > 500$ で $C(k) \sim k^{-1}$ の減衰を示し (第5図), リンク数の多い企業ほどクラスター係数が小さくつながりが疎で, リンク数の少ない企業ほどクラスター係数が大きくつながりが密である。同様の特徴は現実の様々なネットワークでも観測されている [7]。

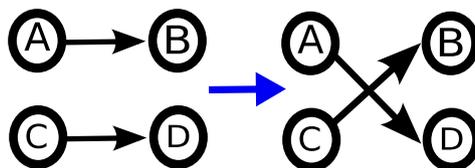


第4図：距離 L の確率密度分布。



第5図：クラスター係数のリンク数依存性。

2.4 リンク数保存のランダムネットワーク



第6図：リンク数を保存するようなリンクの組の入れ替え。

単にリンク数の情報だけからでは得られない特徴を抽出するため, 実ネットワークをリンク数保存のランダムネットワークと比較する。リンク数保存のランダムネットワークは, 各企業の入リンク数 (○←) と出リンク数 (○→) と相互リンク数 (○↔) を保存するようなリンクの組の入れ替え操作 (第6図) をネットワークがランダムになるまで繰り返すことで得られる [8]。実ネットワークとランダムネットワークで, 各ノードの二体相互作用は同じになる。本研究では,

リンク数保存のランダムネットワークを 1000 個作成し、実ネットワークとの比較から統計的有意性を評価する。

2.5 並列計算の実装

解析する大規模ネットワークは疎なグラフなため、隣接リスト表現 (ノードに隣接するすべてのノードを隣接リストに列挙する) によりデータ構造を保持する。

本研究での主な計算は、同じ計算をパラメータや乱数の種を変えて何回も行うものであり、各コアが独立な計算をすればよいため、実装は容易である。MPI による並列化で 1024 コアを用いて計算を行った。

3 ページランクとオーソリティ・ハブ度

3.1 ページランク

有向ネットワークの構造は、ノード i からノード j へのリンクがあれば $A_{ij} = 1$ 、リンクがなければ $A_{ij} = 0$ と表現した隣接行列 A_{ij} から理解できる。大規模な隣接行列をそのまま扱うのは困難が伴う。そこで、隣接行列を確率行列に変換し、この確率行列の最大固有ベクトルとして各企業の重要度を定義したのがページランクである [9]。ページランクは Web ページの重要度の指標として Google で利用されている。

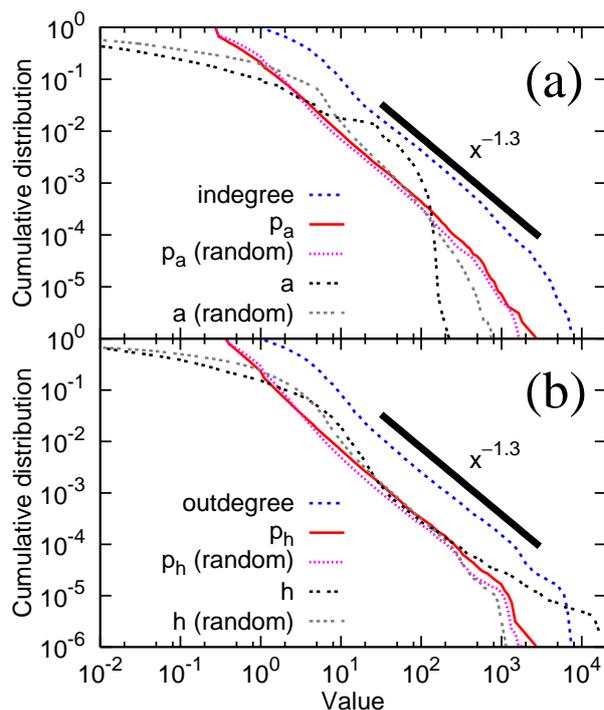
ページランクは、ランダムジャンプ付きのネットワーク上のランダムウォークの定常状態 (滞在時間) として定義される。このとき、ランダムウォーカーは、確率 $1 - \varepsilon$ でランダムに選んだ一つの出リンクに沿って進み、確率 ε で全ノードの中からランダムに選んだ一つノードにジャンプする (ただし、出リンクがない場合は、常に全ノードからランダムに選んだ一つノードにジャンプする) もとする。この過程はマルコフ連鎖で記述でき、確率行列の性質とペロン・フロベニウスの定理から最大固有値 1 の一意な解が保証されるので、ページランク p_a は連立一次方程式

$$x_i = (1 - \varepsilon) \sum_j M_{ij} x_j + 1/n$$

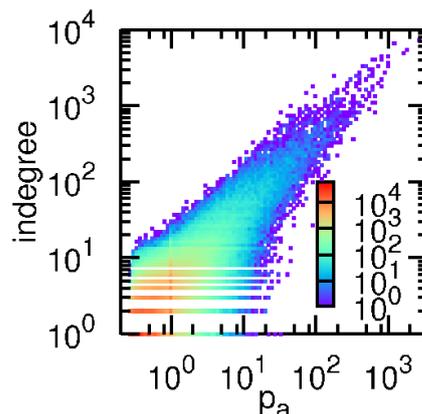
の解として求まる [10]。ただし、 $M_{ij} = A_{ji}(\sum_k A_{jk})^{-1}$ (ただし、ノード j に出リンクがない場合は $M_{ij} = 0$ とする)、 $p_{a_i} = n x_i (\sum_j x_j)^{-1}$ 、 $\varepsilon = 0.15$ とする。ページランクの値が大きくなるためには、単に入リンク数が多いだけでなく、自分へリンクしているノードのページランクの値が大きいことも重要になる。有向リンクの方向はお金の流れの向きにとっているので、 p_a は各企業に流れるお金の流量と解釈できる。

ページランクは、ネットワークのリンクの方向を逆向きにしても同様に定義できる。このように定義したページランク p_h は、各企業に流れる製品・サービスの流量と解釈できる。

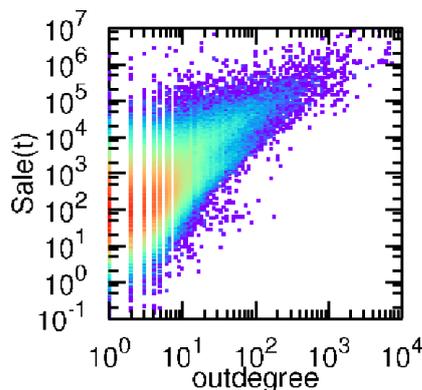
企業間取引ネットワークでは、 p_a は入リンク数と、 p_h は出リンク数と同じような分布をしている (第 7 図)。Kendall の順位相関係数は第 2 表のようになり、互いに強く相関している (第 8 図)。つまり、全体としてみればページランクはリンク数と同じような量になっている。



第 7 図：(a) 入リンク数 (indegree), p_a , a と (b) 出リンク数 (outdegree), p_h , h の累積確率分布。比較のため、リンク数保存のランダムネットワークで求めた結果も示している。



第 8 図： p_a と入リンク数の同時分布。



第 9 図： 出リンク数と売上高の同時分布。

第 2 表： Kendall の順位相関係数 τ 。* は p -value $< 10^{-8}$ を示す。

	入リンク数	出リンク数	p_a	p_h	a	h
出リンク数	0.23*	-	-	-	-	-
p_a	0.75*	0.14*	-	-	-	-
p_h	0.14*	0.71*	0.08*	-	-	-
a	0.67*	0.10*	0.53*	0.05*	-	-
h	0.16*	0.62*	0.09*	0.47*	0.09*	-
売上高	0.25*	0.36*	0.21*	0.34*	0.18*	0.20*
申告所得	0.14*	0.24*	0.13*	0.26*	0.08*	0.16*
正の利益金	0.12*	0.15*	0.13*	0.16*	0.08*	0.10*
従業員数	0.25*	0.31*	0.21*	0.29*	0.20*	-0.07*
r_{sale}	0.06*	0.03*	0.07*	0.03*	0.06*	0.03*
r_{income}	0.04*	0.01	0.06*	0.01	0.05*	0.03*
$r_{profit+}$	0.00	0.00	0.03*	0.01*	0.00	0.00

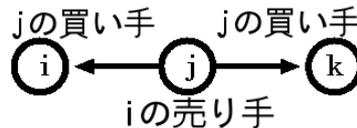
3.2 オーソリティ・ハブ度

オーソリティ度 a とハブ度 h は隣接行列の最大特異ベクトル (それぞれ $A^T A$, AA^T の最大固有ベクトル) として定義され, $a_i = \sum_j A_{ji} h_j$, $h_i = \sum_j A_{ij} a_j$ の計算を再帰的に繰り返すことで算出できる (HITS (hypertext induced topic selection) アルゴリズム)[11]。ただし,

$\sum_i a_i = 1, \sum_i h_i = 1$ と規格化するものとする。一般に、オーソリティ・ハブ度は解の一意性が保証されない [12]。一意性を保証するため、本研究では A_{ij} の代わりに $(1 - \varepsilon)A_{ij} + \varepsilon/n$ を用いる。ただし、 n は全ノード数とする。

$a_i = \sum_{jk} A_{ji}A_{jk}a_k$ となるので、オーソリティ度は、自分の売り手にとっての買い手のオーソリティ度の総和になる (第 10 図)。よって、オーソリティ度は競争相手がどれだけいるかを表す売り手としての劣位性、同様に、ハブ度は買い手としての劣位性と解釈できる。

企業間取引ネットワークでは、 a は入リンク数と、 h は出リンク数と強く相関しているため (第 2 表)、全体としてみれば、オーソリティ・ハブ度もリンク数と同じような量になっている。



第 10 図：オーソリティ度。

3.3 ネットワーク構造と企業の特徴

Kendall の順位相関係数から、リンク数と企業規模の間には有意な正の相関が認められる (第 2 表)。つまり、リンク数の多い企業ほど企業規模が大きい (第 9 図)。一方、リンク数と企業成長率の間の相関は非常に弱い。これらの企業規模・成長率との相関関係は、ページランク、オーソリティ・ハブ度でみてもほぼ同様である。つまり、企業属性との関係でみても、ページランク、オーソリティ・ハブ度はリンク数と同じような量になっている。

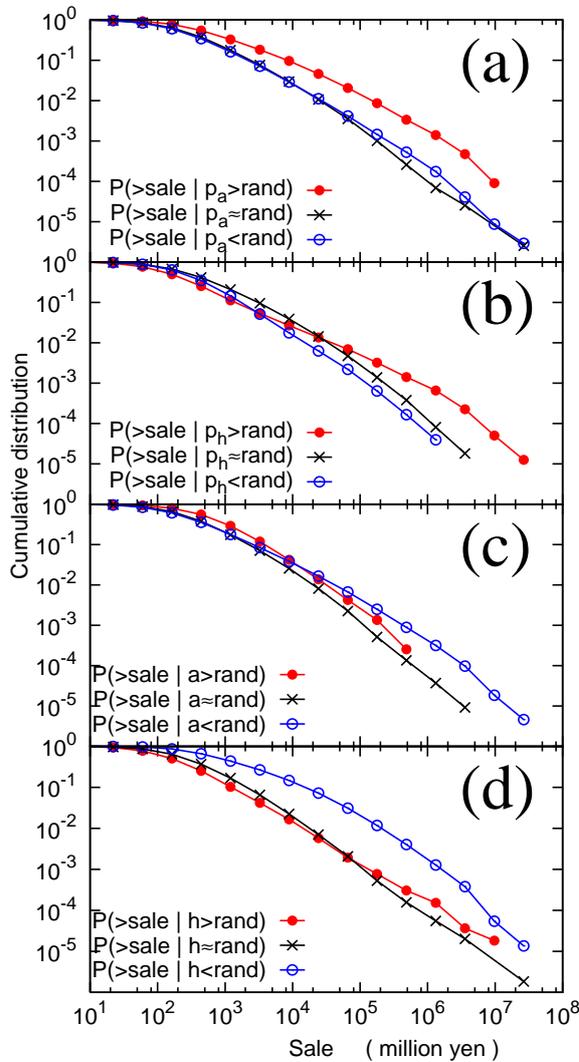
3.4 ランダムネットワークとの比較

リンク数が企業の特徴に与える影響を除去した上で、有向リンク構造と企業の特徴の関係を調べるため、リンク数保存のランダムネットワーク (1000 個) でのページランク、オーソリティ・ハブ度を求め、実際のネットワークでの値と比較した。

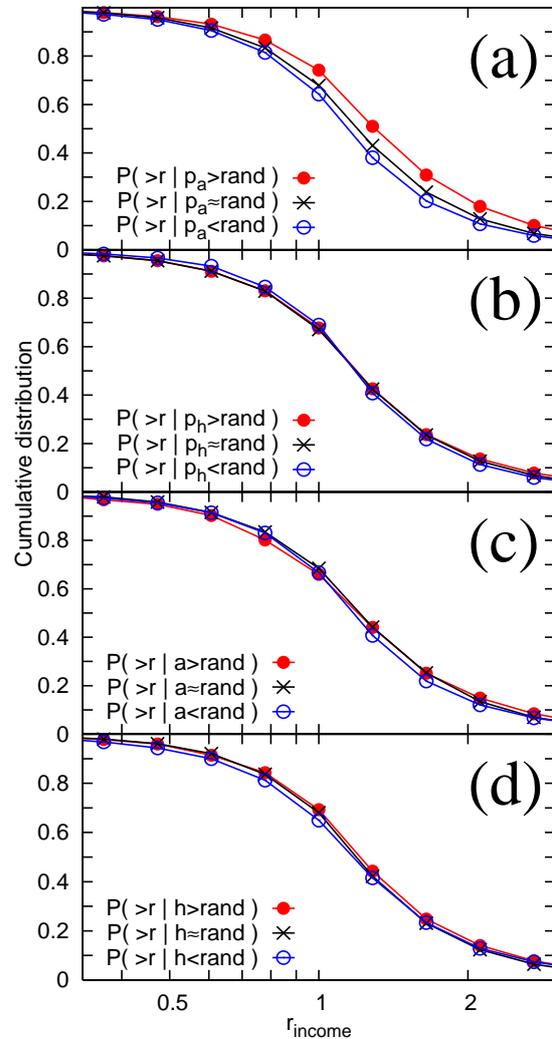
実際のネットワークとランダムネットワークとで、ページランクの分布にほとんど違いはない (第 7 図)。一方、ランダムネットワークと比較して実際のネットワークでは、オーソリティ度の分布の裾野は狭く指数的に減衰し、ハブ度の分布は裾野が広い。これは、売り手として競争相手の多い企業 (オーソリティ度の大きい企業) は少なく、買い手として競争相手の多い企業 (ハブ度の大きい企業) が多いことを示している。

ページランク、オーソリティ・ハブ度のそれぞれについて、ランダムネットワークでの値と比較して、実際のネットワークでの値が統計的に「大きい値をとる企業 (>rand)」、「同じような値をとる企業 (~rand)」、「小さい値をとる企業 (<rand)」の三つのタイプに企業を分類した。各タイプ別にみた売上高の累積分布は第 11 図のようになる。売上高の大きい企業ほど、ページランクを大きく ($p_a > \text{rand}, p_h > \text{rand}$)、オーソリティ・ハブ度を小さく ($a < \text{rand}, h < \text{rand}$) する、つまり、お金や製品・サービスの流量を大きく、売り手・買い手として優位になるようなリンク構造をとる傾向がある。他の企業規模についてもこの特徴を確認できる。また、各タイプ別にみた申告所得の成長率の累積分布は第 12 図のようになる。成長企業は、ページランク p_a を大きく ($p_a > \text{rand}$) する、つまり、お金の流量を大きくするようなリンク構造をとる傾向がある。他の企業成長率についてもこの特徴を確認できる。

これらの特徴は，入リンク数，出リンク数，ページランク，オーソリティ・ハブ度の値自体だけからでは得られない，ランダムネットワークとの比較によって得られた知見である。特に，企業成長率は単独の企業そのものの情報だけから得られる特徴量とは無相関であるにもかかわらず，お金の流量とは関係しており，有向ネットワーク構造としてシステム全体をみることではじめて捉えられる結果である。



第 11 図 : (a) p_a , (b) p_h , (c) a , (d) h で条件つけた売上高の累積分布。他の企業規模についても同様の結果が得られる。



第 12 図 : (a) p_a , (b) p_h , (c) a , (d) h で条件つけた申告所得の成長率の累積分布。他の企業成長率についても同様の結果が得られる。

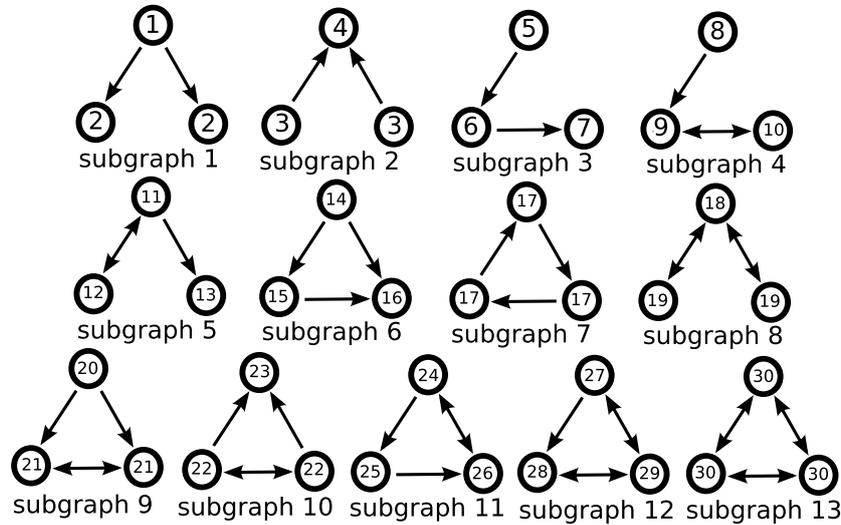
4 ネットワークモチーフ

4.1 特徴的な三体相互作用

リンクをランダムにつなぎ変えたネットワークと比較して，ネットワーク中で統計的に有意に出現する特徴的な部分グラフをネットワークモチーフという [13, 14]。ネットワークモチーフを調べることで，ネットワークを構成する部品を明らかにし，ボトムアップ的にネットワーク構造を調べることができる。

三ノードの部分グラフ (三ノードのつながり方) は全部で 13 種類ある (第 13 図)。有向ネットワークでは，三角形の構成の仕方は一通りではないため，クラスター係数の定義は様々に考えら

れる。三ノードの部分グラフの出現頻度を調べることは、有向ネットワーク上のクラスター係数を調べることに対応する。無向ネットワーク上のクラスター係数と異なり、これらの三ノードの部分グラフはループ・仲介・合流・分岐などの流れ構造を表現している。



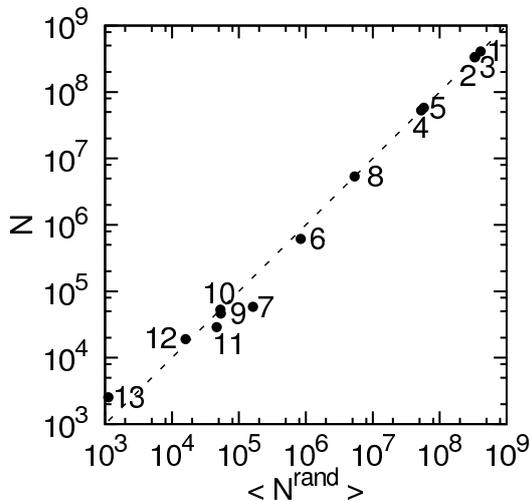
第 13 図：三ノードの部分グラフ。各部分グラフは 1~3 種類の role を持つため、各ノードは 30 種類の role に分類できる。

4.2 ネットワークモチーフ

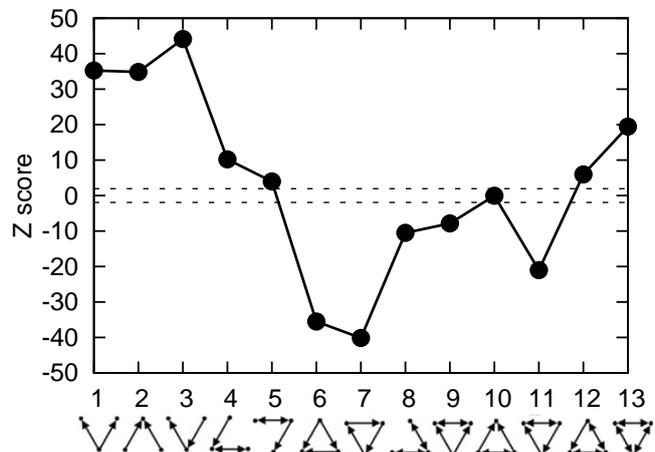
各部分グラフ i の実際のネットワーク上での出現回数 N_i とリンク数保存のランダムネットワーク上での出現回数 N_i^{rand} は第 14 図のようになる。出現回数は、(1) リンクを一つ取り出す (2) 取り出したリンクに関する部分グラフを数える (3) そのリンクを除去するという操作を繰り返すことで算出できる [15]。出現回数の差の統計的有意性は

$$Z_i = \left(N_i - \langle N_i^{\text{rand}} \rangle \right) / \sqrt{\langle (N_i^{\text{rand}} - \langle N_i^{\text{rand}} \rangle)^2 \rangle}$$

で評価できる (第 15 図)。



第 14 図：各部分グラフの実ネットワーク上での出現回数 N とランダムネットワーク上での出現回数 $\langle N^{\text{rand}} \rangle$ 。



第 15 図：各部分グラフの出現回数の統計的有意性。

言語構造や二部グラフで見られるV字構造 (部分グラフ 1~5) と web や友人関係などの社会ネットワークで見られるクリーク (部分グラフ 13) がネットワークモチーフになっている。一方, feedforward ループ (部分グラフ 6) と feedback ループ (部分グラフ 7) はアンチモチーフになっている。つまり, 生産・消費活動のネットワークでは, ループ構造は少なくV字型とクリークが重要な構造になる。

4.3 role

ネットワーク構造をより詳細に調べるため, 構造同値により role を定義する。たとえば, feedback ループ (部分グラフ 7) は対称性からどのノードも同じ立場にあり, 各ノードは同じ一つの role を持つが, feedforward ループ (部分グラフ 6) は三つの role を持つ。このようにして, すべてノードは 30 種類の role に分類できる (第 13 図)³。

4.4 role による業種の特徴づけ

日本標準産業分類の中分類により, 各企業は 96 業種に分類できる。ある一つの業種に注目し, 業種間の違いをみることで, たとえば製造業の企業はどの role に位置しやすいかなどを調べることができる。

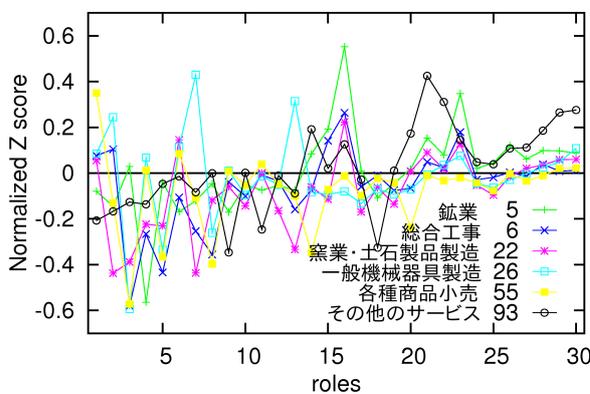
各業種別に, 各 role i の実際のネットワーク上ででの出現回数 N_i とランダムネットワーク上ででの出現回数 N_i^{rand} を算出し, 出現回数の統計的有意性を

$$Z_i = \left(N_i - \langle N_i^{\text{rand}} \rangle \right) / \sqrt{\langle (N_i^{\text{rand}} - \langle N_i^{\text{rand}} \rangle)^2 \rangle}$$

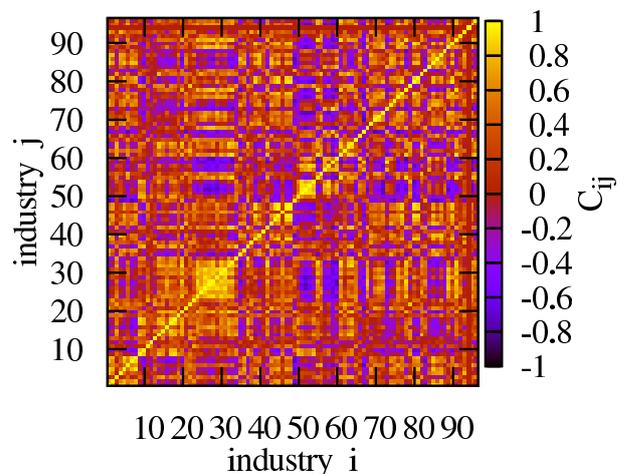
で評価する。異なる業種間を比較するため, Z を規格化した

$$NZ_i = Z_i / \sqrt{\sum_i Z_i^2}$$

を考える。各 role i について NZ_i をプロットした role プロファイルは, 一般に, 業種により異なる (第 16 図)。業種間の NZ の相関行列は第 17 図のようになる。近い業種 ($i \sim j$) 同士は role プロファイルが似ていることが分かる。

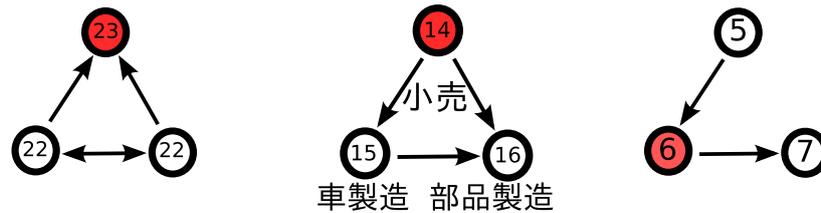


第 16 図: 業種別の role プロファイル (各 role i について NZ_i をプロットしたもの)。



第 17 図: 業種 i の NZ と業種 j の NZ の間の相関係数で定義される相関行列。

³ただし, 一般に各ノードは複数の部分グラフに属するため, 一つ以上の role を持ちうる。



第 20 図：各グループを特徴づける role (左：グループ A，中央：グループ B，右：グループ C)。

このように、得られたデンドログラムは業種の事業内容と関係しており、role による業種の分類は経済学的に意味ある分類になっている。また、role プロファイルのみを使って業種を分類することで、有向ネットワーク構造の観点からの分類も可能である。有向ネットワーク構造を表現する role プロファイルは、経済学的に価値ある情報を提供する道具になるものと考えられる。

5 まとめ

日本企業約 100 万社の取引関係・企業属性データを、100 万ノード・400 万リンクの有向ネットワークとして実証分析した。まず、有向ネットワーク上のノードの重要度をページランク、オーソリティ・ハブ度として算出し、企業規模・企業成長率との関係性を調べた。その結果、大企業はページランクを大きく、オーソリティ度・ハブ度を小さくするリンク構造を、成長企業はページランクを大きくするリンク構造を取る傾向を明らかにした。また、ネットワーク中で統計的有為に出現する三ノードの部分グラフを抽出した結果、企業間取引では V 字構造とクリークがモチーフに、feedforward ループと feedback ループがアンチモチーフになっていることを明らかにした。さらに、role による有向リンク構造の特徴づけを行った。これらの結果は、単独の企業そのものの情報だけからでは得られない、有向ネットワーク構造としてシステム全体をみてはじめて捉えられる特徴であり、企業成長・衰退の理解、企業の健全性の把握、操業停止・連鎖倒産のリスク評価などに役立てる上で重要な知見になると考えられる。

近年のグローバル化により、要素間の相互作用が強くなり、世界金融危機・世界的資源インフレ・連鎖破綻に代表される連鎖危機が緊急課題になっている。また、情報化により、経済現象のみならず人間活動に関係するあらゆるデータが利用可能になってきている。このような複雑なシステムを理解するには、要素レベルの網羅的な大規模データから相互作用ネットワークを同定し、ネットワーク構造の特徴抽出・意味づけ・機能推定を行うことで、システム全体としての挙動・特徴を解明する必要がある。したがって、今後、あらゆる分野で本研究のような超並列計算を用いた大規模データの実証分析が重要になってくると考えられる。

謝辞

データ提供いただいた独立行政法人経済産業研究所に感謝する。本研究は、高安秀樹氏 (ソニー CSL) と高安美佐子准教授 (東京工業大学大学院総合理工学研究科) との共同研究である。本研究の一部は科学研究費補助金若手研究 (B)20760053 と全国銀行学術研究振興財団の助成を受けて行った。数値計算は、スーパーコンピューター若手利用者推薦の下、T2K オープンスパコン HITACHI HA8000 クラスタシステム (東京大学情報基盤センター) を用いて行った。

参考文献

- [1] T. Ohnishi, H. Takayasu, and M. Takayasu. Hubs and Authorities on Japanese Inter-Firm Network: Characterization of Nodes in Very Large Directed Networks. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 179:157–166, 2009.
- [2] T. Ohnishi, H. Takayasu, and M. Takayasu. Network Motifs in Inter-Firm Networks. *Journal of Economic Interaction and Coordination*, under review.
- [3] A. Clauset, C.R. Shalizi, and M.E.J. Newman. Power-law distributions in empirical data. *Arxiv preprint arXiv:0706.1062*, 2007.
- [4] Y.U. Saito, T. Watanabe, and M. Iwamura. Do larger firms have more interfirm relationships? *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 383(1):158–163, 2007.
- [5] Y. Fujiwara and H. Aoyama. Large-scale structure of a nation-wide production network. *Arxiv preprint arXiv:0806.4280*, 2008.
- [6] H. Fan, Z. Wang, T. Ohnishi, H. Saito, and K. Aihara. Multicommunity weight-driven bipartite network model. *Physical Review E*, 78(2):26103, 2008.
- [7] E. Ravasz and A.L. Barabási. Hierarchical organization in complex networks. *Physical Review E*, 67(2):26112, 2003.
- [8] R. Milo, N. Kashtan, S. Itzkovitz, M.E.J. Newman, and U. Alon. On the uniform generation of random graphs with prescribed degree sequences. *Arxiv preprint cond-mat/0312028*, 2003.
- [9] S. Brin and L. Page. The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine. *Computer Networks and ISDN Systems*, 30(1-7):107–117, 1998.
- [10] C.P.C. Lee, G.H. Golub, and S.A. Zenios. Partial state space aggregation based on lumpability and its application to pagerank. *Technical report, Stanford University*, 2003.
- [11] J. Kleinberg. Authoritative Sources in a Hyperlinked Environment. *Journal of the ACM*, 46(5):604–632, 1999.
- [12] A. Farahat, T. Lofaro, J.C. Miller, G. Rae, and L.A. Ward. Authority Rankings from HITS, PageRank, and SALSA: Existence, Uniqueness, and Effect of Initialization. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 27(4):1181, 2006.
- [13] R. Milo, S. Shen-Orr, S. Itzkovitz, N. Kashtan, D. Chklovskii, and U. Alon. Network Motifs: Simple Building Blocks of Complex Networks. *Science*, 298(5594):824–827, 2002.
- [14] R. Milo, S. Itzkovitz, N. Kashtan, R. Levitt, S. Shen-Orr, I. Ayzenshtat, M. Sheffer, and U. Alon. Superfamilies of evolved and designed networks. *Science*, 303(5663):1538–1542, 2004.
- [15] R. Itzhack, Y. Mogilevski, and Y. Louzoun. An optimal algorithm for counting network motifs. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 381:482–490, 2007.